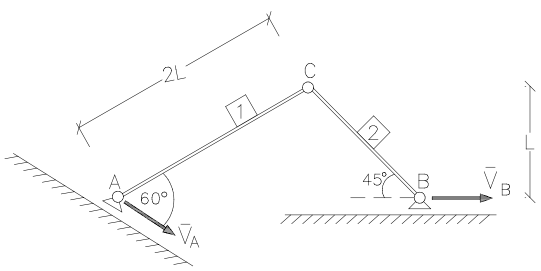
Przykład 3.3. Łańcuch kinematyczny o 2 stopniach swobody



rys. 3. A

Znane są prędkości leżących na jednym poziomie podpór przesuwnych oznaczonych na rysunku 3.A jako punkty A, B. Wynoszą one

$V_A = V_o$, $V_B = 2V_o$.

Wyznaczyć prędkość punktu C, łączącego pręty.

ROZWIĄZANIE

Ruch płaski każdego z prętów 1 i 2 przedstawimy jako superpozycję ruchu postępowego określonego przez ruch bieguna (wybranego dla danego pręta) i ruchu obrotowego wokół tego bieguna.

Dla tarczy 1 jako biegun ruchu obrotowego przyjmiemy podporę A. Prędkość przegubu C traktowanego jako punkt tarczy 1 możemy wówczas przedstawić jako sumę

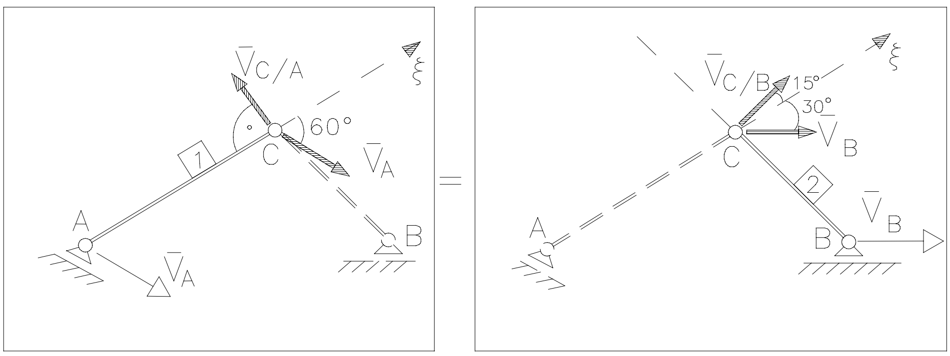
$$\bar{V}_C = \bar{V}_A + \bar{V}_{C/A} \qquad (*)$$

Przyjmując podporę B jako biegun ruchu obrotowego tarczy 2, możemy prędkość punktu C przedstawić równocześnie jako

$$\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{C/B} \qquad (**)$$

Z porównanie równań (*) i (**) uzyskujemy (zilustrowane na rys. 3.B) równanie

$$\bar{V}_A + \bar{V}_{C/A} = \bar{V}_B + \bar{V}_{C/B} \qquad (***)$$



rys. 3. B

Równanie (***) pozwala na wyznaczenie wartości wektorów $\bar{V}_{C/A}$ i $\bar{V}_{C/B}$. Oczywiście dla określenia szukanej prędkości wystarczy wyznaczyć tylko jedną z niewiadomych. Wartość wektora $\bar{V}_{C/B}$ możemy znaleźć rzutując wektory występujące w równaniu (***) na oś ξ, prostopadłą do wektora $\bar{V}_{C/A}$. Uzyskujemy równanie

$$V_A \cos 60^\circ = V_{C/B} \cos 15^\circ + V_B \cos 30^\circ ,$$

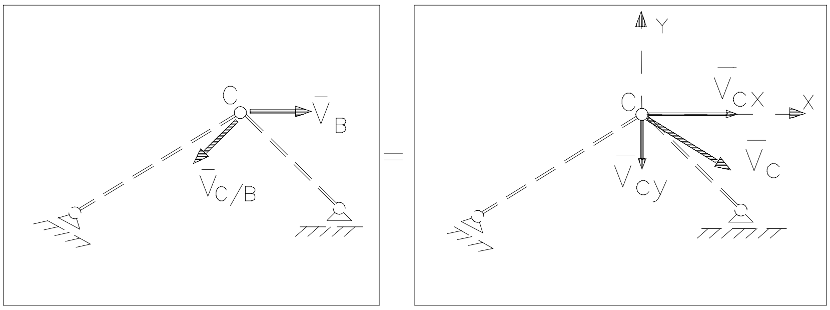
a po podstawieniu wartości V_A , V_B

$$0.5 \cdot V_o = 0.966 \cdot V_{C/B} + 1.732 \cdot V_o ,$$

skąd $V_{C/B} = -1.28 \cdot V_o$ (zwrot przeciwny do założonego na rys. 3.B). Szukana prędkość przegubu C jest wypadkową wektorów $\overline{V}_B$ i $\overline{V}_{C/B}$. Określenie wektora prędkości punktu C - poprzez podanie składowych w prostokątnym układzie współrzędnych długości uzyskamy rzutując wektory równania (**) na osie *xy* (rys.3.C):

$$V_{Cx} = V_B - V_{C/B} \cos 45^\circ = 1.10 V_o ,$$

$$V_{Cy} = -V_{C/B} \cos 45^\circ = -0.90 V_o .$$



rys. 3. C

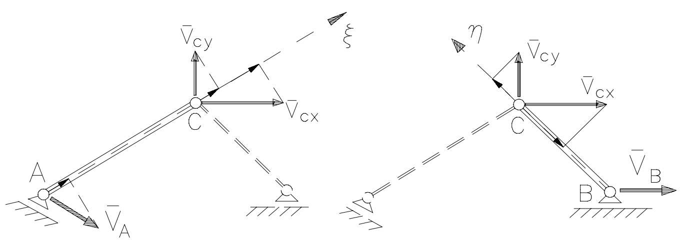
Długość wektora prędkości punktu C wynosi zatem

$$V_C = \sqrt{\left(V_{Cx}\right)^2 + \left(V_{Cy}\right)^2} = 1.42 V_o .$$

Rysunek 3.C ilustruje uzyskane wyniki.

Uwagi

• Do obliczenia prędkości punktu C można także zastosować twierdzenie o rzucie prędkości dwóch punktów na łączącą je prostą. W tym celu wygodnie będzie przedstawić wektor $\overline{V}_C$ jako sumę wektorów $\overline{V}_{Cx}$ i $\overline{V}_{Cy}$, a następnie zastosować twierdzenie o rzucie wektorów prędkości na oś pręta 1 i pręta 2 (rys. 3.D).



rys. 3. D

Dla każdego z prętów, z twierdzenia o rzucie prędkości mamy:

$$V_{C\xi} = V_{A\xi} \qquad \text{i} \qquad V_{C\eta} = V_{B\eta}.$$

Wykorzystując jednocześnie związek $\overline{V}_C = \overline{V}_{Cx} + \overline{V}_{Cy}$, uzyskujemy

$$V_{C\xi} = \left(V_{Cx}\right)_\xi + \left(V_{Cy}\right)_\xi \qquad \text{i} \qquad V_{C\eta} = \left(V_{Cx}\right)_\eta + \left(V_{Cy}\right)_\eta .$$

Podstawiając otrzymujemy:

$$\left(V_{Cx}\right)_\xi + \left(V_{Cy}\right)_\xi = V_{A\xi} \ ,$$

$$\left(V_{Cx}\right)_\eta + \left(V_{Cy}\right)_\eta = V_{B\eta} \ ,$$

a po uwzględnieniu kątów nachylenia wektorów do osi prętów

$$V_{Cx}\, cos\, 30^\circ + V_{Cy}\, cos\, 60^\circ = V_A\, cos\, 60^\circ ,$$

$$-V_{Cx}\, cos\, 45^\circ + V_{Cy}\, cos\, 45^\circ = -V_B\, cos\, 45^\circ .$$

Z otrzymanego układu równań wyznaczamy długości wektorów $\overline{V}_{Cx}, \overline{V}_{Cy}$:

$$V_{Cx} = \frac{V_A + V_B}{1+\sqrt{3}} = \frac{3}{1+\sqrt{3}} V_o = 1.10 V_o \ ,$$

$$V_{Cy} = \frac{V_A - \sqrt{3} V_B}{1+\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} V_o = -0.90 V_o \ .$$

- Wprowadzenie składowych V_{Cx} i V_{Cy} ułatwia wyznaczenie prędkości punktu C. Jeśli bowiem dla opisu prędkości punktu C wprowadzimy wektor $\overline{V}_C$ o nieznanej długości i nachyleniu względem osi pręta to wyznaczenie niewiadomego wektora wymaga rozwiązania układu równań trygonometrycznych.