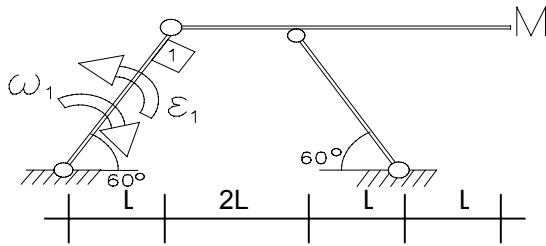


Przykład 3.4. Wyznaczanie prędkości i przyspieszenia punktu



rys. 4. A

W położeniu przedstawionym na rysunku 4.A prędkość kątowna tarczy 1 wynosi $\omega_1 = \omega_o$, a przyspieszenie kątowne $\varepsilon_1 = -\varepsilon_o$.

Znaleźć prędkość i przyspieszenie punktu M w tym położeniu.

ROZWIĄZANIE

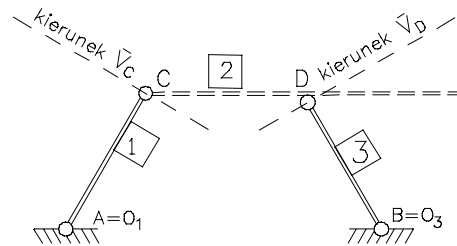
1. Obliczenie prędkości

Znajdujemy położenie chwilowych środków obrotu dla tarcz 1, 2 i 3.

Zauważmy, że tarcze 1, 3 obracają się wokół nieruchomych podpór A i B. Pozwala to określić kierunki prędkości w punktach C i D (rys. 4.B).

Prędkość liniowa punktu C wynosi

$$V_C = \omega_1 |AC| = 2\omega_o l.$$



rys. 4.B

Znając kierunki prędkości punktów C i D możemy wyznaczyć położenie chwilowego środka prędkości tarczy 2 (rys. 4.C).

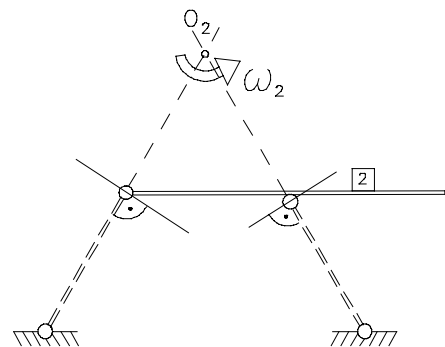
Prędkość kątowną tarczy 2 obliczymy jako

$$\omega_2 = \frac{V_C}{|O_2C|} = \frac{2\omega_o l}{2l} = \omega_o.$$

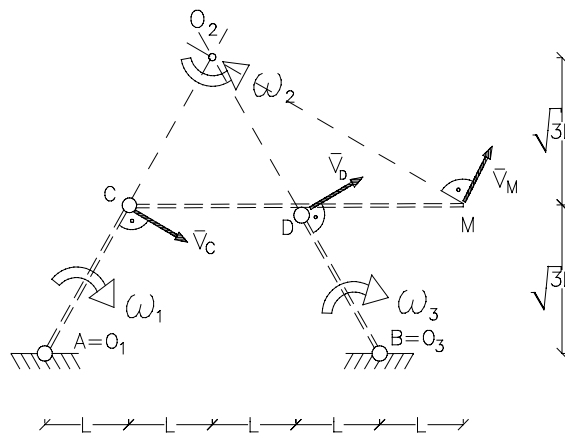
Poszukiwaną prędkość punktu M obliczamy jako

$$V_M = \omega_2 |O_2M| = \omega_o \sqrt{12} l = 3.46 \omega_o l.$$

Kierunki i zwroty wektorów prędkości przedstawione są na rysunku 4.D.



rys. 4.C

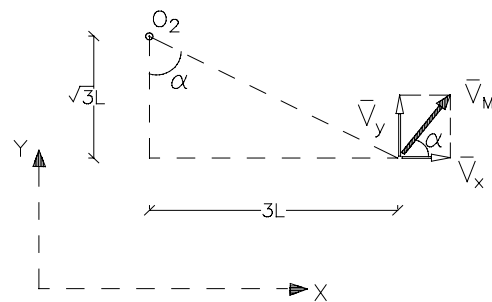


rys. 4.D

Prędkość punktu M można także przedstawić w postaci składowych w układzie współrzędnych xy (rys. 4.E). Wynoszą one:

$$V_{Mx} = V_M \cos \alpha = 1.73 \omega_o l$$

$$V_{My} = V_M \sin \alpha = 3 \omega_o l$$



rys. 4.E

Uwaga

Na rysunku 4.D przedstawiono także kierunek prędkości punktu D oraz prędkość kątową tarczy 3. Wielkości te nie są niezbędne do określenia prędkości punktu M. Wartość prędkości kątowej ω_3 będzie wykorzystana do obliczenia przyspieszenia punktu M. Obliczymy ją następująco

$$\omega_3 = \frac{V_D}{|O_3 D|}.$$

Ponieważ prędkość punktu D wynosi $V_D = \omega_2 |O_2 D| = \omega_2 2l = 2\omega_o l$,

zatem $\omega_3 = \omega_o$.

2. Obliczenie przyspieszeń

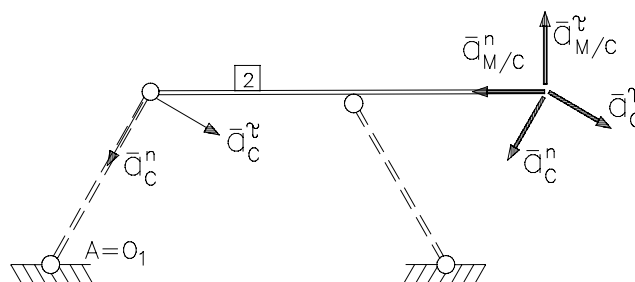
Przyspieszenie punktu M opisujemy przez ruch płaski tarczy 2 (rys. 4.F). Przyjmując punkt C jako biegun ruchu obrotowego tarczy 2, przyspieszenie punktu M można przedstawić jako

$$\bar{a}_M = \bar{a}_C + \bar{a}_{M/C} = \bar{a}_C + \bar{a}_{M/C}^n + \bar{a}_{M/C}^r,$$

gdzie

$$a_{M/C}^n = \omega_2^2 |CM| = (\omega_o)^2 4l = 4\omega_o^2 l,$$

$$a_{M/C}^r = \varepsilon_2 |CM|.$$



rys. 4.F

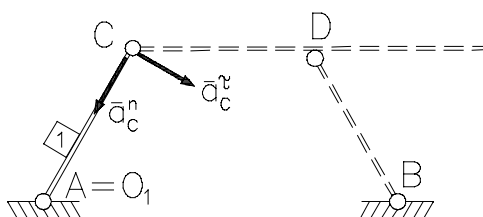
Przyśpieszenie punktu C wyznaczamy z ruchu tarczy 1 (rys. 4.G) jako

$$\bar{a}_C = \bar{a}_C^n + \bar{a}_C^\tau$$

gdzie \bar{a}_C^n i \bar{a}_C^τ oznaczają przyśpieszenia punktu C w ruchu obrotowym wokół podpory A i wynoszą

$$a_C^n = \omega_1^2 |O_1 C| = 2\omega_o^2 l,$$

$$a_C^\tau = \varepsilon_1 |O_1 C| = 2\varepsilon_o l.$$



rys. 4.G

Aby określić przyśpieszenie $\bar{a}_{M/C}^\tau$ musimy wyznaczyć przyśpieszenie kątowe tarczy 2. W tym celu przyśpieszenie przegubu D, łączącego tarcze 2 i 3, wyznaczymy z dwóch stron - względem bieguna C (należącego do tarczy 2) i względem bieguna B (należącego do tarczy 3). Uzyskamy

$$\bar{a}_D = \bar{a}_C + \bar{a}_{D/C} \quad \text{i} \quad \bar{a}_D = \bar{a}_{D/B}.$$

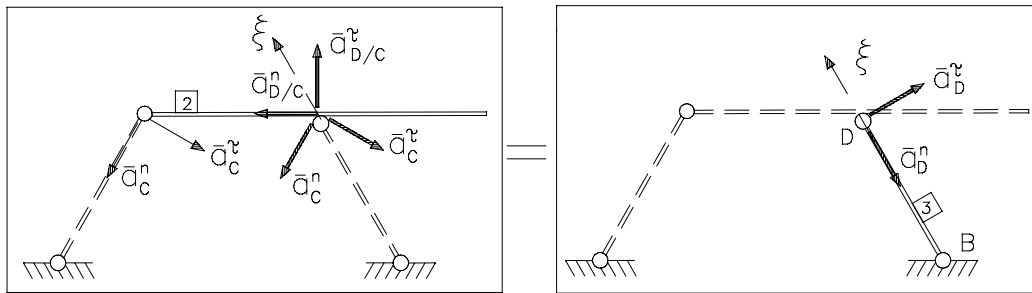
W powyższych równaniach mamy

$$\bar{a}_C = \bar{a}_C^n + \bar{a}_C^\tau,$$

$$\bar{a}_{D/C} = \bar{a}_{D/C}^n + \bar{a}_{D/C}^\tau,$$

$$\bar{a}_{D/B} = \bar{a}_D^n + \bar{a}_D^\tau.$$

Wielkości te przedstawia rysunek 4.H.



rys. 4.H

Z porównania obu przedstawień, otrzymujemy równanie

$$\bar{a}_C^n + \bar{a}_C^\tau + \bar{a}_{D/C}^n + \bar{a}_{D/C}^\tau = \bar{a}_D^n + \bar{a}_D^\tau, \quad (*)$$

w którym

$$a_{D/C}^n = \omega_2^2 |CD| = 2\omega_o^2 l,$$

$$a_{D/C}^\tau = \varepsilon_2 |CD|,$$

$$a_D^n = \omega_3^2 |BD| = 2\omega_o^2 l.$$

Aby obliczyć wartość przyśpieszenia kąowego tarczy 2 rzutujemy wektory w równaniu (*) na oś pręta 3 (oś ξ na rys. 4.H) i otrzymujemy

$$-a_C^n \cos 60^\circ - a_C^\tau \cos 30^\circ + a_{D/C}^n \cos 60^\circ + a_{D/C}^\tau \cos 30^\circ = -a_D^n,$$

a stąd
$$a_{D/C}^\tau = 2\varepsilon_o l - \frac{4}{\sqrt{3}} \omega_o^2 l.$$

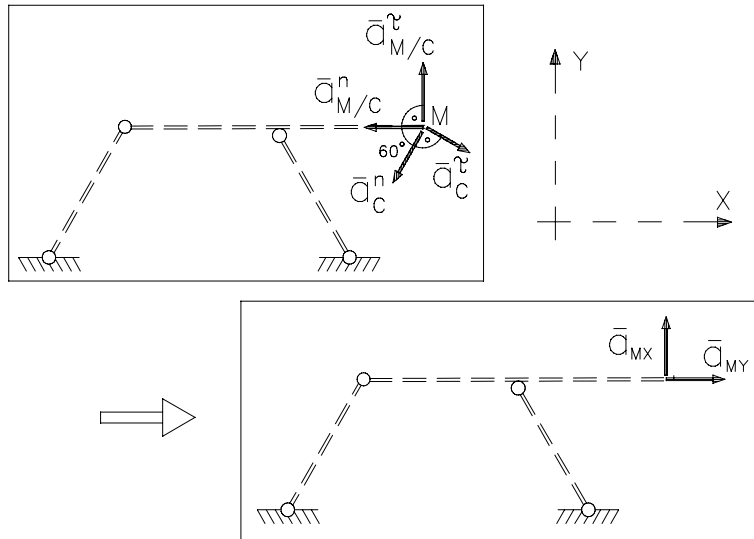
Przyśpieszenie kąowe ε_2 wynosi

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{D/C}^\tau}{|CD|} = \varepsilon_o - \frac{2}{\sqrt{3}} \omega_o^2.$$

Możemy określić teraz składową $a_{M/C}^\tau$ przyśpieszenia punktu M:

$$a_{M/C}^\tau = \varepsilon_2 |CM| = 4\varepsilon_o l - 4.62\omega_o^2 l.$$

Określone zatem zostały wszystkie składowe przyśpieszenia punktu M.



rys. 4.1

Przyśpieszenie punktu M przedstawione w układzie xy (rys. 4.1) ma składowe

$$a_{Mx} = -a_C^n \cos 60^\circ + a_C^\tau \cos 30^\circ - a_{M/C}^n = -2\omega_o^2 l \frac{1}{2} + 2\varepsilon_o l \frac{\sqrt{3}}{2} - 4\omega_o^2 l = 1.73\varepsilon_o l - 5\omega_o^2 l,$$

$$a_{My} = -a_C^n \cos 30^\circ - a_C^\tau \cos 60^\circ + a_{M/C}^\tau = -2\omega_o^2 l \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\varepsilon_o l \frac{1}{2} + 4\varepsilon_o l - 4.62\omega_o^2 l = 3\varepsilon_o l - 6.35\omega_o^2 l.$$