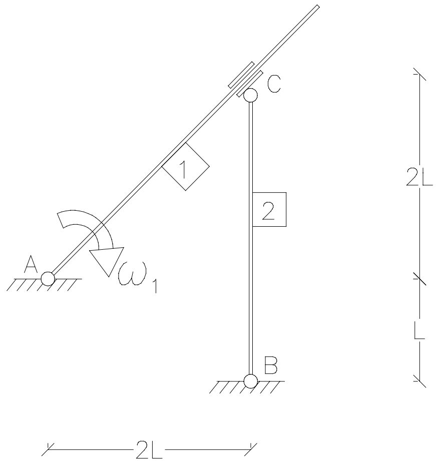
Przykład 3.7. Wyznaczanie prędkości i przyśpieszenia z wykorzystaniem twierdzenia o ruchu złożonym



W przedstawionym na rysunku 7.A układzie tarcza 1 obraca się ze stałą prędkością kątową $\omega_1 = \omega_o$.

Znaleźć prędkość i przyśpieszenie kątowe tarczy 2.

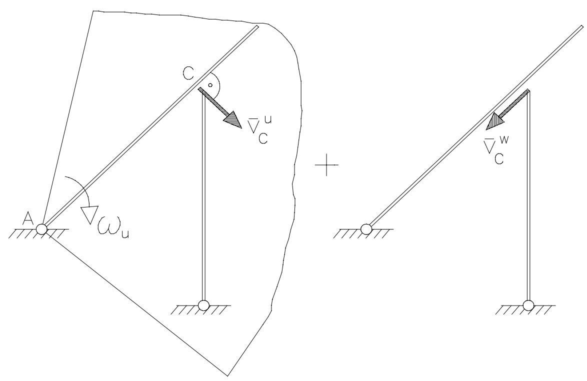
rys. 7. A

ROZWIĄZANIE

1. Obliczenie prędkości

Do wyznaczenia prędkości kątowej tarczy 2 wystarczy znajomość prędkości liniowej dowolnego jej punktu (tarcza 2 porusza się ruchem obrotowym wokół nieruchomej podpory B). Wyznaczymy prędkość przegubu C. W tym celu zastosujemy dla tego punktu twierdzenie o prędkościach w ruchu złożonym.

Jako ruch unoszenia przyjmiemy ruch tarczy 1 wokół podpory A, związując z tą tarczą układ



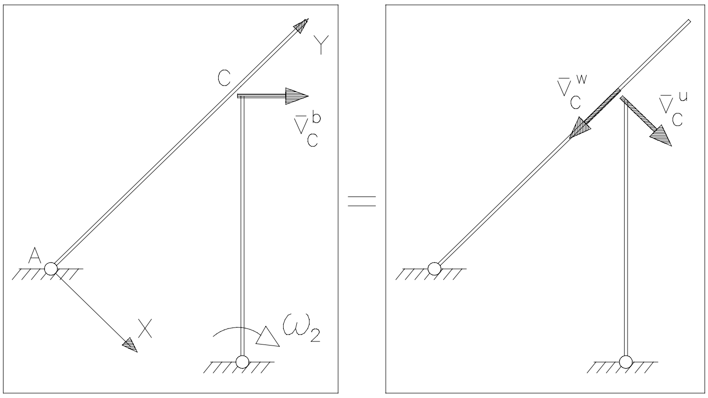
rys. 7. B

ruchomy *XY*. Ruch względny przegubu C (ruch względem ruchomego układu) będzie zatem ruchem postępowym prostoliniowym wzdłuż pręta 1. Prędkość unoszenia punktu C ma kierunek prostopadły do osi pręta AC, a prędkość względna w punkcie C ma kierunek zgodny z osią AC (rys. 7.B).

Prędkość przegubu C można przedstawić następująco:

$$\overline{V}_C^b = \overline{V}_C^u + \overline{V}_C^w \qquad (*)$$

co ilustruje rysunek 7.C.



rys. 7. C

Kierunek prędkości bezwzględnej przegubu C wynika z możliwości ruchu tarczy 2. Tarcza 2 wykonuje ruch obrotowy wokół nieruchomej podpory B, zatem wektor prędkości bezwzględnej jest prostopadły do osi BC i określony jest zależnością

$$\overline{V}_C = \overline{\omega}_2 \times \overline{r}_{BC} \ .$$

Prędkość unoszenia określona jest zależnością:

$$\overline{V}_C^u = \overline{\omega}^u \times \overline{r}_{AC}$$

zatem w równaniu (*) znane są kierunki wszystkich wektorów prędkości, oraz wartość prędkości unoszenia $V_C^u = \omega^u |AC| = 2\sqrt{2}\omega_o l$.

Rzutując wektory w równaniu (*) na oś X otrzymujemy

$$V_C^b \frac{1}{\sqrt{2}} = V_C^u$$

a stąd $V_C^b = 4\omega_o l$.

Poszukiwana prędkość kątowa wynosi $\omega_2 = \dfrac{V_C}{|BC|} = \dfrac{4}{3}\omega_o$.

Rzutując ponadto wektory w równaniu (*) na oś Y znajdujemy potrzebną w dalszym rozwiązaniu prędkość względną $V_C^w = -2\sqrt{2}\omega_o l$. Znak ”-” oznacza, że zwrot wektora prędkości względnej jest przeciwny do założonego na rysunku 7.C.

2. Obliczenie przyśpieszenia

Podobnie jak przy wyznaczaniu prędkości analizować będziemy ruch przegubu C. Przyśpieszenie tego punktu opiszemy dwojako:

- jako przyśpieszenie punktu tarczy 2 wykonującej ruch obrotowy wokół podpory B,
- jako przyśpieszenie w ruchu złożonym, opisanym wcześniej w punkcie dotyczącym obliczania prędkości.

Porównanie obu opisów przyśpieszenia punktu C pozwoli wyznaczyć szukane wielkości.

Przyśpieszenie punktu C wynikające z ruchu obrotowego tarczy 2 wokół podpory B można przedstawić następująco (rys. 7.E):

$$\overline{a}_C^b = \overline{a}_{C/B}^n + \overline{a}_{C/B}^\tau \ , \qquad (**)$$

gdzie

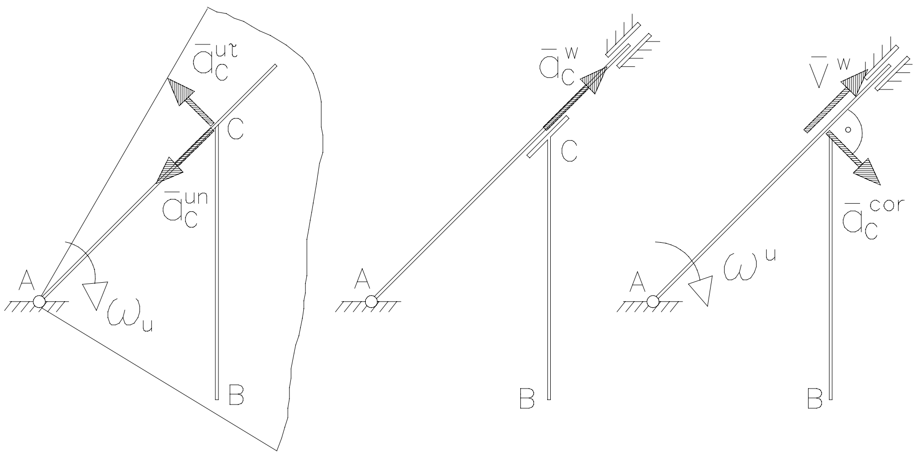
$$a_{C/B}^n = (\omega_2)^2 |BC| = \frac{16}{3}\omega_o^2 l .$$

Interesować nas będzie wartość składowej $a_{C/B}^\tau$, ponieważ pozwoli ona wyznaczyć poszukiwane przyśpieszenie kątowe $\varepsilon_2 = \frac{a_{C/B}^\tau}{|BC|}$.

Jednocześnie, stosując dla punktu C twierdzenie o przyśpieszeniach w ruchu złożonym, możemy zapisać:

$$\overline{a}_C^b = \overline{a}_C^u + \overline{a}_C^w + \overline{a}_C^{Cor} . \qquad (***)$$

Wektory przyśpieszeń: unoszenia, względnego i Coriolisa przedstawia rysunek 7.D (na rysunku przedstawiono rzeczywisty zwrot wektora $\overline{V}_C^w$).



rys. 7. D

W równaniu (***) $\overline{a}_C^u$ jest przyśpieszeniem w ruchu unoszenia - ruchu obrotowym wokół podpory A. Wynosi ono

$$\overline{a}_C^u = \overline{a}_C^{un} + \overline{a}_C^{u\tau} ,$$

gdzie $a_C^{un} = (\omega^u)^2 |AC| = 2\sqrt{2}\omega_o^2 l$,

$a_C^{u\tau} = 0$, ponieważ $\varepsilon^u = 0$.

Wektor $\overline{a}_C^w$ oznacza przyśpieszenie w ruchu względnym - ruchu postępowym prostoliniowym. Jego kierunek jest zatem zgodny z kierunkiem prędkości $\overline{V}_C^w$.

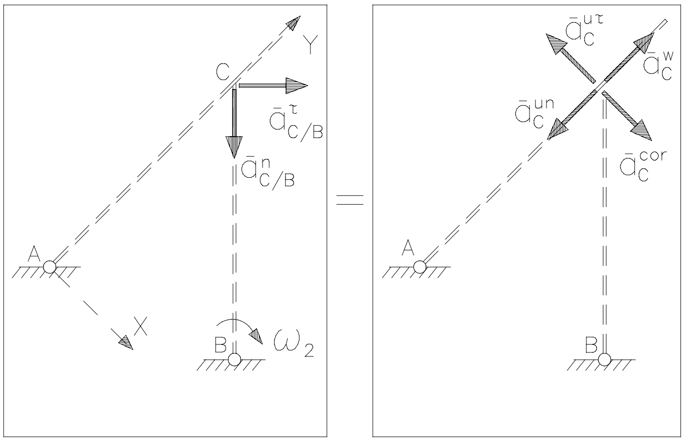
Kierunek i zwrot przyśpieszenia Coriolisa wynika z wyznaczonej wcześniej prędkości $\overline{V}_C^w$ i $\overline{\omega}^u$. Wartość tego przyśpieszenia wynosi:

$$a_C^{Cor} = 2\omega^u V^W \sin 90^\circ = 4\sqrt{2}\omega_o^2 l.$$

Porównując opisy (**) i (***) otrzymujemy równanie:

$$\overline{a}_{C/B}^n + \overline{a}_{C/B}^\tau = \overline{a}_C^{un} + \overline{a}_C^{u\tau} + \overline{a}_C^w + \overline{a}_C^{Cor}, \qquad (****)$$

które ilustruje rysunek 7.E.



rys. 7. E

Rzutując wektory w równaniu (****) na oś X otrzymujemy

$$a_{C/B}^n \frac{1}{\sqrt{2}} + a_{C/B}^\tau \frac{1}{\sqrt{2}} = -a_C^{u\tau} + a_C^{Cor}$$

i stąd $a_{C/B}^\tau = \frac{8}{3}\omega_o^2 l$

Poszukiwane przyśpieszenie kątowe tarczy 2 wynosi

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{C/B}^\tau}{|BC|} = \frac{8}{9}\omega_o^2$$

i jest skierowane zgodnie z prędkością kątową ω_2 .