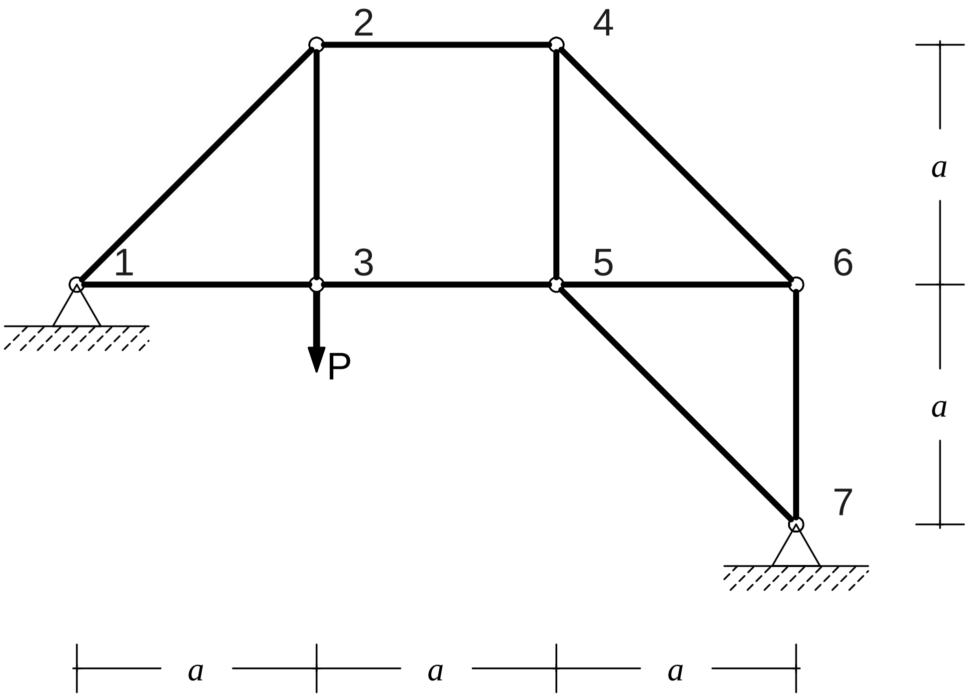
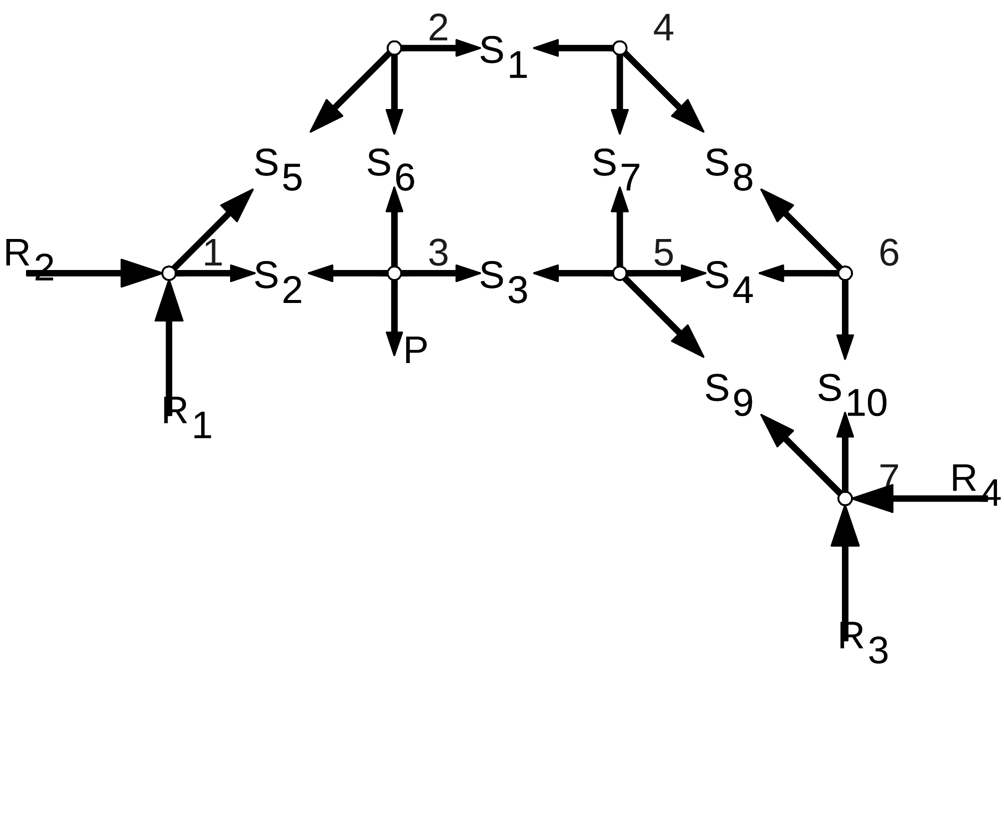
Przykład 1.3. Kratownica płaska

Czy pokazana na rysunku płaska kratownica jest statycznie wyznaczalna?



Rozwiązanie: Zgodnie z definicją układu statycznie wyznaczalnego *warunki równowagi powinny wystarczyć do jednoznacznego wyznaczenia reakcji podpór i sił przekrojowych w rozpatrywanym układzie*. W przypadku kratownicy jako warunki równowagi możemy przyjąć równania równowagi węzłów kratownicy.



Wtedy niewiadomymi będą reakcje podporowe $\boldsymbol{R_1,...R_4}$ oraz siły normalne $\boldsymbol{S_1},...$ $\boldsymbol{S_{10}}$. Warunkiem koniecznym statycznej wyznaczalności jest zgodność liczby równań równowagi z liczbą niewiadomych, czyli dla rozpatrywanej kratownicy płaskiej

$$2\,\boldsymbol{w} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r}$$

gdzie:

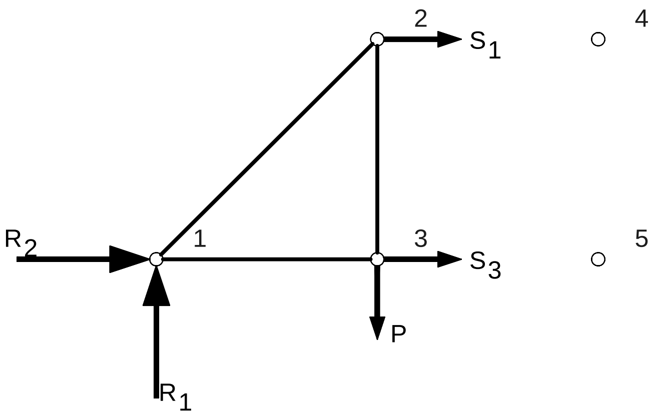
$\boldsymbol{w}$ – liczba węzłów, $\boldsymbol{p}$ – liczba prętów, $\boldsymbol{r}$ – liczba reakcji.

W naszym przypadku mamy

$\boldsymbol{w} = 7$; $\boldsymbol{p} = 10$; $\boldsymbol{r} = 4$

a zatem *warunek konieczny statycznej wyznaczalności jest spełniony*. Z teorii układów algebraicznych równań liniowych wiadomo, że warunkiem dostatecznym istnienia jednoznacznego rozwiązania jest, aby wyznacznik główny układu równań był niezerowy. Warunek ten jest niewygodny do sprawdzenia. Prościej jest spróbować rozwiązać zagadnienie równowagi układu dla przykładowego obciążenia.

Rozpocznijmy analizę od warunków równowagi pokazanej części kratownicy



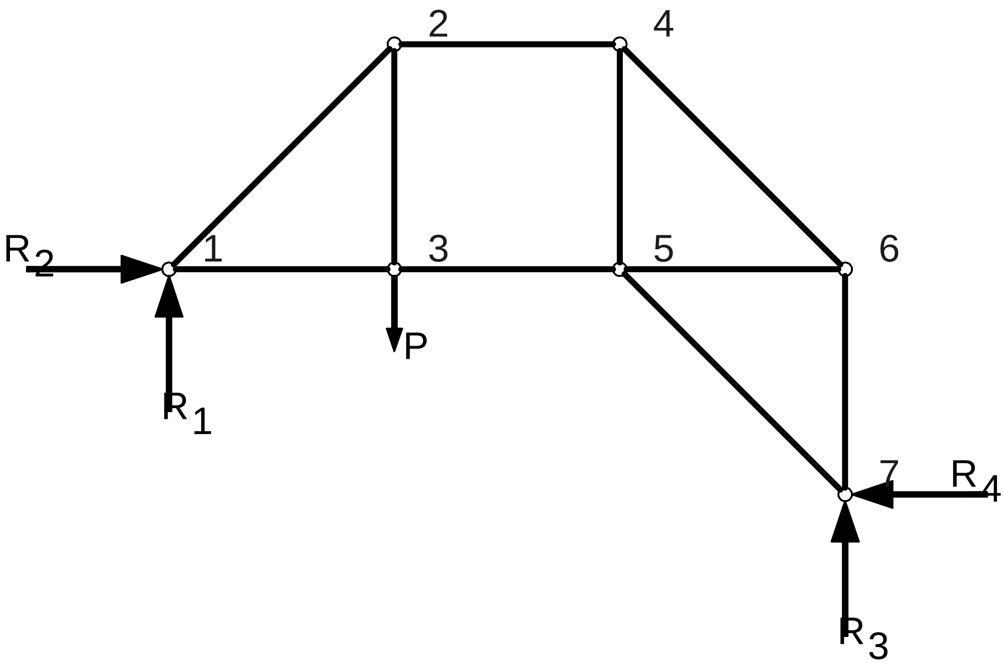
$$\sum F_y = 0\,;\ \Rightarrow R_1 = P\,.$$

Z równowagi całej kratownicy wnioskujemy

$$\sum F_y = 0\,;\ \Rightarrow R_3 = 0\,;$$

$$\sum M_1 = 0\,;\ \Rightarrow R_4 = -P\,;$$

$$\sum M_7 = 0\,;\ \Rightarrow R_2 = -P\,.$$



Przejdźmy teraz do warunków równowagi poszczególnych węzłów wg kolejności numerowania:

$$\frac{1}{2}S_5\sqrt{2}+R_1=0,\ -S_4-\frac{1}{2}S_8\sqrt{2}=0$$

$$-\frac{1}{2}S_5\sqrt{2}-S_6=0,\ -\frac{1}{2}S_9\sqrt{2}-R_4=0$$

$$\frac{1}{2}S_8\sqrt{2}-S_{10}=0,\ -S_1+\frac{1}{2}S_8\sqrt{2}=0$$

$$\frac{1}{2}S_9\sqrt{2}+S_{10}+R_3=0,\ -S_3+S_4+\frac{1}{2}S_9\sqrt{2}=0$$

$$-S_7-\frac{1}{2}S_8\sqrt{2}=0,\ S_1-\frac{1}{2}S_5\sqrt{2}=0$$

$$S_7-\frac{1}{2}S_9\sqrt{2}=0,\ -S_2+S_3=0$$

$$S_6-P=0,\ S_2+\frac{1}{2}S_5\sqrt{2}+R_2=0$$

Wynika z nich, że S_1,... S_{10} oraz R_1,...R_4 wynoszą kolejno:

$$[-P, 2\,P, 2\,P, P, -P\sqrt{2}, P, P, -P\sqrt{2}, P\sqrt{2}, -P, P, -P, 0, -P]$$

Zatem *kratownica jest statycznie wyznaczalna*.