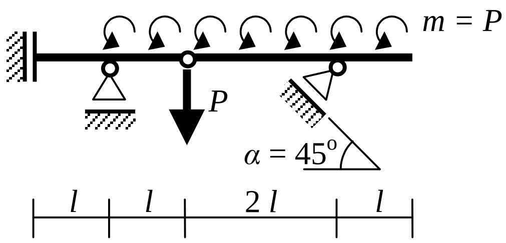
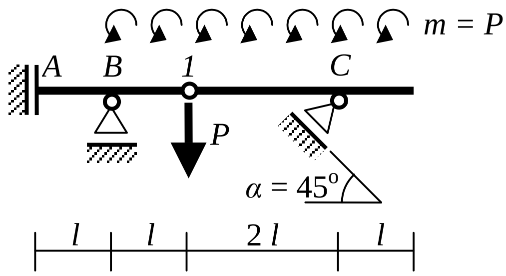
Przykład 2.2. Układ belkowy złożony

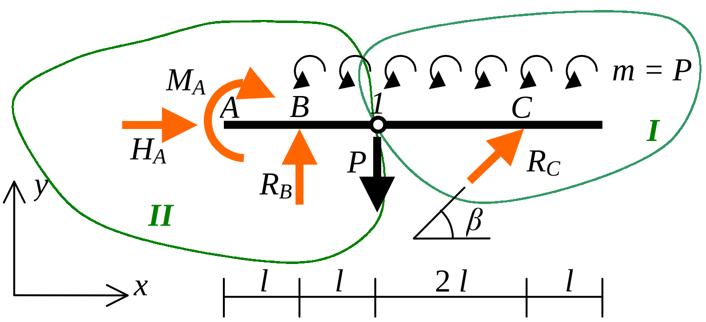
Polecenie: wyznaczyć reakcje podporowe dla poniższej belki obciążonej siłą skupioną P i obciążeniem momentowym ciągłym o stałym natężeniu $m = P$.

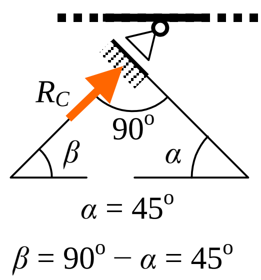


Oznaczamy kolejne podpory literami A, B, C oraz przegub łączący część lewą i prawą układu cyfrą *1*.

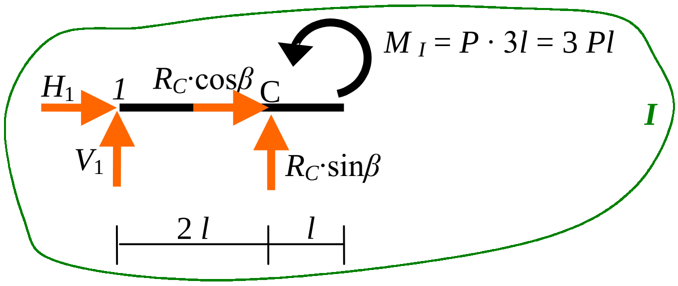


O układzie belkowym złożonym mówimy wówczas, gdy składa się on z co najmniej dwu belek pojedynczych. W rozpatrywanym przypadku belki te są ze sobą połączone za pomocą przegubu. Rozwiązywanie zadania rozpoczynamy od uwolnienia układu od więzów i zastąpienia podpór reakcjami.





W miejscu podpory teleskopowej w punkcie A, jako reakcje, występują: moment M_A i siła pozioma H_A (prostopadła do kierunku możliwego przesuwu), w punkcie B reakcja pionową R_B, natomiast w punkcie C reakcję R_C, której linia działania nachylona jest do poziomu pod kątem $\beta = 45^{\circ}$. Trzy równania równowagi, którymi dysponujemy dla płaskiego dowolnego układu sił nie wystarczą do wyznaczenia czterech niewiadomych. Dodatkowe, czwarte równanie, zapiszemy stosownie do rodzaju połączenia występującego w punkcie *1*. W przypadku połączenia przegubowego będzie to równanie momentów względem punktu *1* dla części lewej bądź prawej układu belkowego. Linie działania oddziaływań V_1 i H_1 przechodzą przez punkt *1*, zatem momenty sił V_1 i H_1 względem punktu *1* są równe zeru. W rozwiązywanym układzie korzystniejsze będzie zapisanie równania momentów dla części (*I*) (prawej), ponieważ w równaniu tym wystąpi tylko jedna niewiadoma R_C (w równaniu momentów dla części lewej wystąpiłyby dwie niewiadome: M_A i R_B). W celu uniknięcia konieczności wyznaczania ramienia siły R_C względem punktu *1* możemy skorzystać z twierdzenia Varignona. Zastąpimy reakcję R_C jej składową pionową i poziomą.



Ciągłe obciążenie momentowe *m*, działające na prawą część układu (*I*), zastąpimy wypadkowym momentem M_I. Wartość wypadkowego momentu, dla przypadku m = const, obliczamy mnożąc natężenie ciągłego obciążenia momentowego przez długość odcinka belki, na którym działa to obciążenie. Dla prawej części układu (*I*) jest to $3l$. W zapisie równania momentów względem punktu *1* dla części (*I*) nie ma znaczenia punkt przyłożenia momentu M_I.
Poza składowymi reakcji R_C i wypadkowym momentem M_I na prawą część układu w przegubie *1* działają dwie siły: V_1 i H_1. Skoro ich linie działania przechodzą przez punkt *1* to te dwie niewiadome nie wystąpią w równaniu momentów względem punktu *1*.
Siłę skupioną *P*, która działa w przegubie *1*, możemy przyłożyć do lewej części układu (*II*) bądź prawej (*I*). Nie będzie to miało wpływu na wielkość wyznaczanych reakcji, natomiast będzie to miało wpływ na wielkość oddziaływania pionowego V_1.

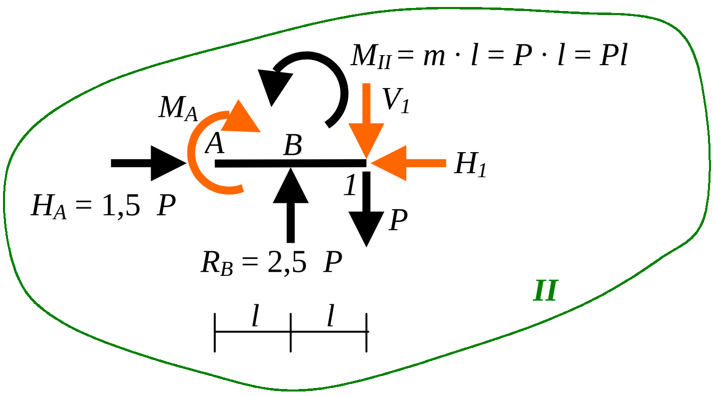
$$\sum_i M_{i1}^{I} = 0: \qquad R_C \cdot \sin\beta \cdot 2l + M_I = 0 \quad \Rightarrow \quad R_C = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\,P = -1{,}5\sqrt{2}\;P$$

Górny indeks w oznaczeniu równania informuje nas, dla której części układu zostało zapisane równanie. Brak górnego indeksu oznacza, że równanie równowagi zapisane jest dla całego układu.
Po wyznaczeniu reakcji R_C możemy obliczyć reakcje R_B i H_A z równań rzutów sił na osie układu współrzędnych dla całego układu.

$$\sum_i P_{ix} = 0: \qquad H_A + R_C \cdot \cos\beta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H_A = \frac{3}{2}\,P = 1{,}5\;P$$

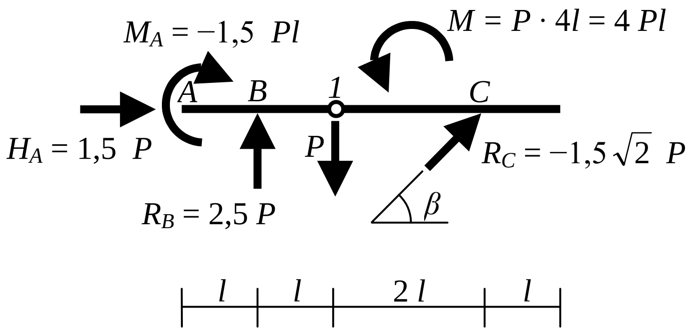
$$\sum_i P_{iy} = 0: \qquad R_B + R_C \cdot \sin\beta - P = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_B = \frac{5}{2}\,P = 2{,}5\;P$$

Ostatnią niewiadomą M_A obliczymy korzystając z równania momentów względem punktu *1* dla części lewej (*II*). Reakcje R_B i H_A, których wartości już znamy, na rysunku lewej części układu (*II*) oznaczone są kolorem czarnym . Ciągłe obciążenie momentowe *m*, działające na lewą część układu (*II*), zastąpimy wypadkowym momentem M_{II}.



$$\sum_i M_{i1}^{II} = 0: \qquad M_{II} - M_A - R_B \cdot l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_A = -\frac{3}{2}\ Pl = -1{,}5\ \ Pl$$

Skoro wyznaczone zostały wszystkie reakcje, a polecenie nie obejmowało wyznaczania oddziaływań V_1 i H_1 w przegubie *1*, pozostaje wykonanie sprawdzenia obliczeń.



Napiszmy na przykład równanie momentów dla całego układu względem punktu *A*. Ciągłe obciążenie momentowe *m* zastąpimy wypadkowym momentem *M*. Wartość wypadkowego momentu obliczamy mnożąc natężenie ciągłego obciążenia momentowego $m = P$ przez długość odcinka belki, na którym działa to obciążenie, czyli przez 4*l*.

$$\sum_i M_{iA} = 0: \qquad -M_A + R_B \cdot l - P \cdot 2l + R_C \cdot \sin\beta \cdot 4l + m \cdot 4l =$$

$$= -(-1{,}5\ \ Pl\,) + 2{,}5\ \ P \cdot l - P \cdot 2l + (-1{,}5\sqrt{2}\ \ P\,) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4l + P \cdot 4l =$$

$$= Pl \cdot (1{,}5 + 2{,}5 - 2 - 6 + 4\,) = 0$$

Równanie spełnione jest tożsamościowo.