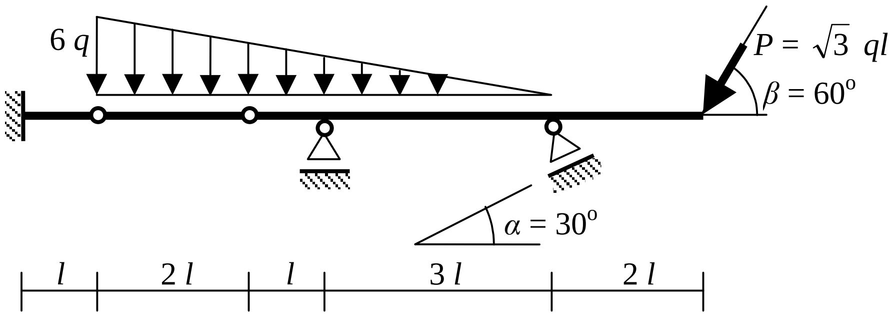
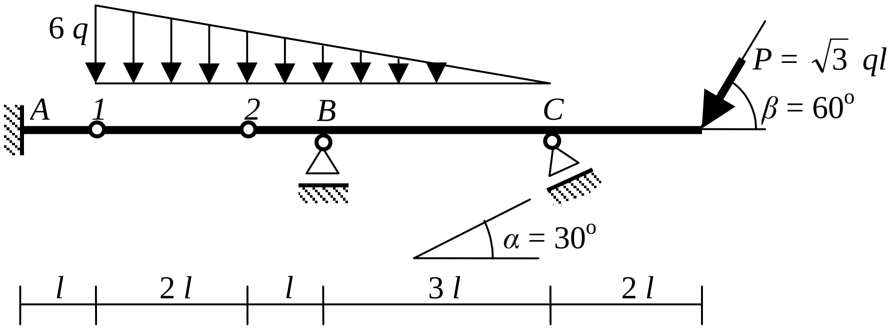
Przykład 2.3. Układ belkowy złożony

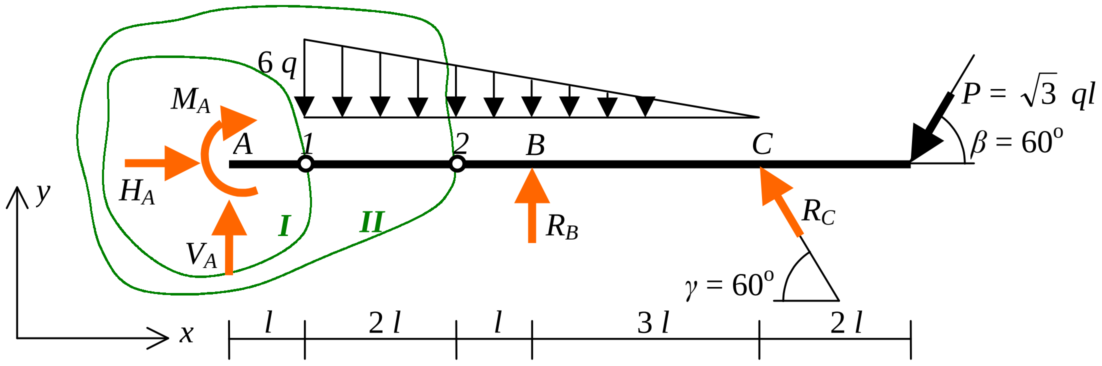
Polecenie: wyznaczyć reakcje podporowe dla poniższej belki obciążonej siłą skupioną *P* i obciążeniem ciągłym *q(x)* o natężeniu zmieniającym się liniowo.

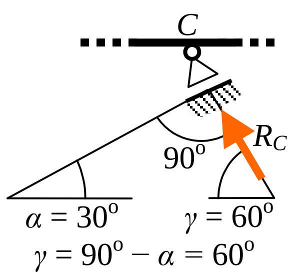


Oznaczamy podpory literami *A*, *B* i *C*, natomiast połączenia przegubowe cyframi *1* i *2*.



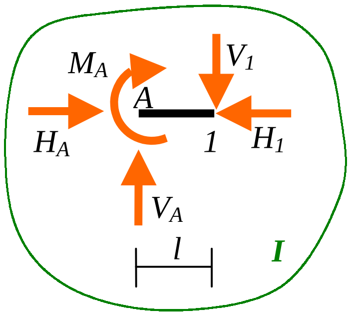
Uwalniamy układ od więzów i zastępujemy podpory reakcjami.





W utwierdzeniu w punkcie *A* działają następujące reakcje: moment M_A oraz składowa pionowa V_A i pozioma H_A, które są od siebie niezależne. W punkcie *B* występuje reakcja R_B o

pionowej linii działania, natomiast w punkcie C reakcja R_C działająca wzdłuż prostej nachylonej do poziomu pod kątem $\gamma = 60^{o}$.
Rozwiązanie zadania rozpoczniemy od zapisania równania momentów względem punktu *1* dla części (*I*) układu. W równaniu tym wystąpią dwie niewiadome M_A i V_A, natomiast pozostałe siły V_1, H_1 i H_A mają linie działania przechodzące przez punkt *1*, a więc momenty tych sił względem punktu *1* są równe zeru.



$$\sum_i M_{i1}^{I} = 0: \qquad - M_A - V_A \cdot l = 0 \qquad (\,*\,)$$

Zapiszemy następne równanie momentów względem punktu *2* dla części (*II*) układu, w którym wystąpią te same niewiadome. W punkcie *2* wartość natężenia obciążenia ciągłego wynosi 4 q.

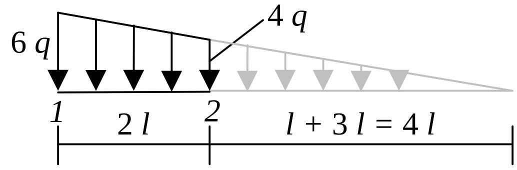
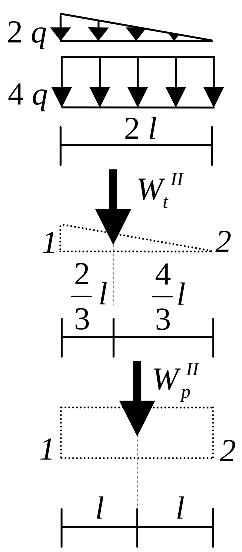
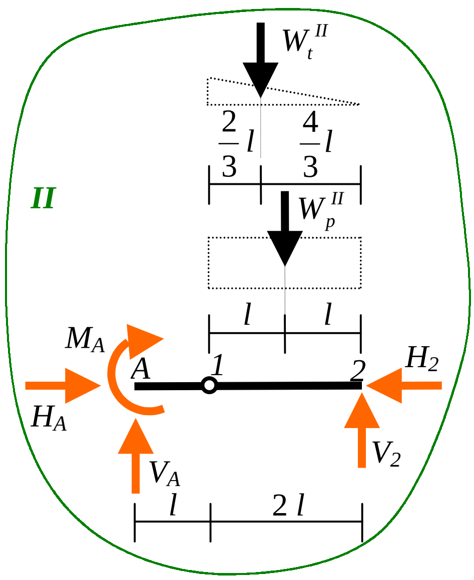


Figura pod wykresem rozkładu natężenia obciążenia ciągłego między przegubami *1* i *2* jest trapezem. W celu uniknięcia konieczności wyznaczania linii działania wypadkowej tego obciążenia (położenia środka ciężkości trapezu), podzielimy obciążenie ciągłe działające na tę część układu zgodnie z poniższym rysunkiem. Wyznaczamy wartości wypadkowych jako pola figur pod wykresami rozkładu natężenia obciążenia ciągłego:

$$W_p^{II} = 4q \cdot 2\,l = 8\,ql, \qquad W_t^{II} = \frac{1}{2} \cdot 2q \cdot 2\,l = 2\,ql$$





Równanie momentów względem punktu *2* dla części (*II*) układu ma postać:

$$\sum_i M_{i2}^{II} = 0: \qquad W_p^{II} \cdot l + W_t^{II} \cdot \frac{4}{3} l - M_A - V_A \cdot 3l = 0 \qquad (\,**\,)$$

W równaniu tym nie występują niewiadome H_A, V_2 i H_2. Linie działania tych sił przechodzą przez punkt 2, więc ich momenty względem punktu 2 są równe zeru. Po podstawieniu do równania (**) wartości wypadkowych W_p^{II} i W_t^{II} rozwiązujemy układ równań:

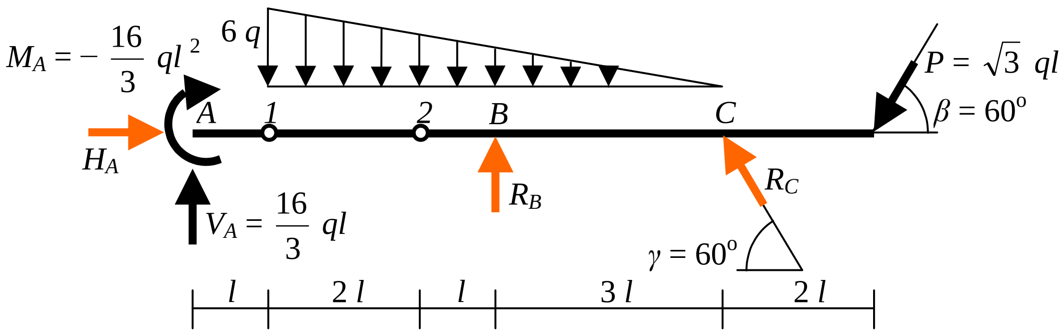
$$-M_A - V_A \cdot l = 0 \qquad (\,*\,)$$

$$-M_A - V_A \cdot 3l + \frac{32}{3} \cdot ql^2 = 0 \qquad (\,**\,)$$

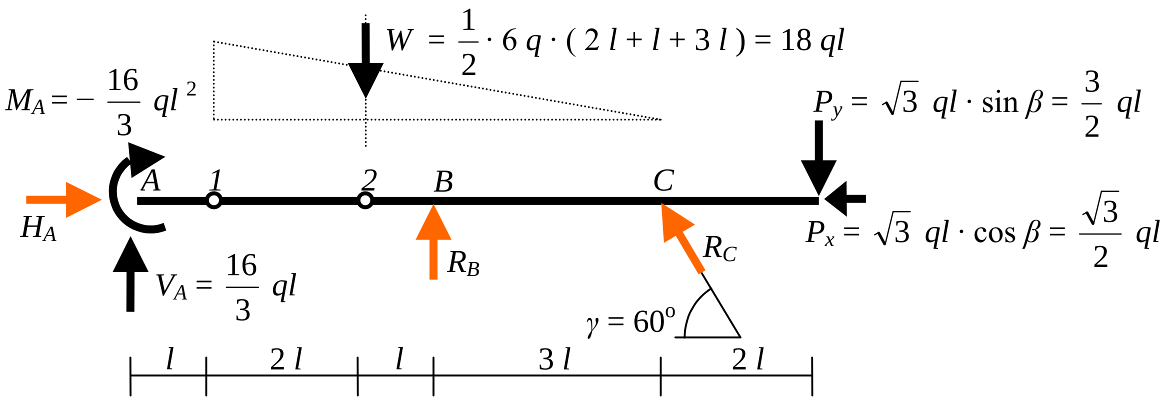
Z rozwiązania układu równań otrzymujemy:

$$M_A = -\frac{16}{3} ql^2, \qquad V_A = \frac{16}{3} ql.$$

Wyznaczone reakcje na schemacie układu oznaczone są kolorem czarnym.
Pozostałe równania równowagi zapiszemy dla całego układu.



Przed zapisaniem równań równowagi wyznaczymy wypadkową obciążenia ciągłego oraz składową pionową i poziomą siły skupionej, przyłożonej do prawego końca układu.



W równaniu sumy momentów względem punktu *C* wystąpi tylko jedna niewiadoma R_B, gdyż linie działania reakcji H_A i R_C przechodzą przez punkt *C*, a więc momenty wymienionych sił względem tego punktu są równe zeru.

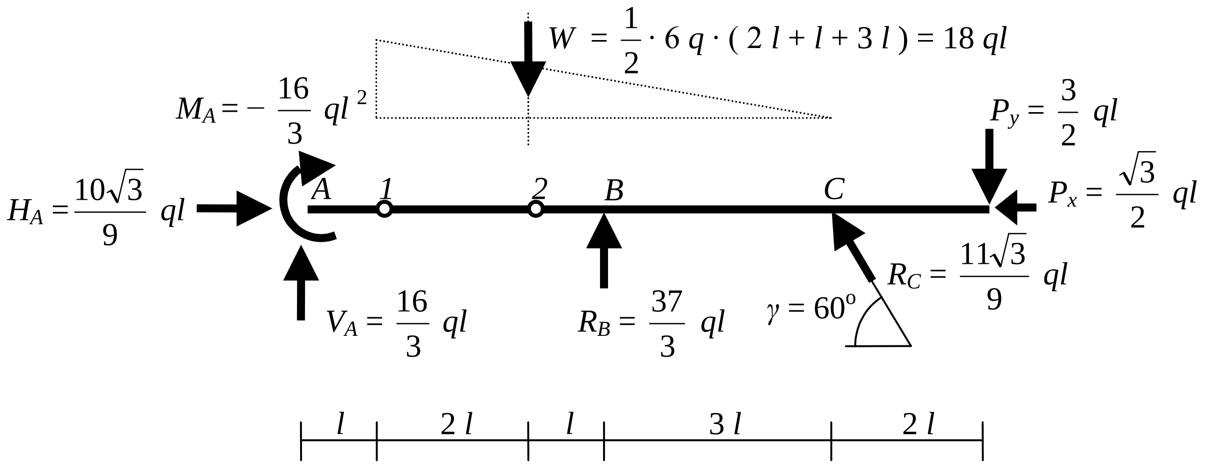
$$\sum_i M_{iC} = 0: \qquad -M_A - V_A \cdot 7l - R_B \cdot 3l - P_y \cdot 2l + W \cdot (\,3l + l\,) = 0 \qquad \Rightarrow R_B = \frac{37}{3}\ ql$$

Zapiszemy teraz równanie sumy rzutów sił na oś pionową dla całego układu.

$$\sum_i P_{iy} = 0: \qquad V_A + R_B + R_C \cdot \sin\gamma - W - P_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_C = \frac{11\sqrt{3}}{9}\, ql$$

Suma rzutów sił na oś poziomą dla całego układu umożliwi wyznaczenie ostatniej niewiadomej H_A.

$$\sum_i P_{ix} = 0: \qquad H_A - R_C \cdot \cos\gamma - P_x = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = \frac{10\sqrt{3}}{9}\, ql.$$



Sprawdzimy poprawność wykonanych obliczeń, zapisując równanie równowagi wcześniej niewykorzystane.

$$\sum_i M_{iA} = 0: \quad -M_A - W \cdot 3l - P_y \cdot 9l + R_B \cdot 4l + R_C \cdot \sin\gamma \cdot 7l =$$

$$= -\left(-\frac{16}{3} \cdot ql^2\right) - 18\,ql \cdot 3l - \frac{3}{2}\,ql \cdot 9l + \frac{37}{3}\,ql \cdot 4l + \frac{11\sqrt{3}}{9}\,ql \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7l =$$

$$= ql^2\left(\frac{16}{3} - 54 - \frac{27}{2} + \frac{148}{3} + \frac{77}{6}\right) = 0$$

Równanie spełnione jest tożsamościowo.

Przedstawimy otrzymane wyniki w postaci liczb dziesiętnych.

$$M_A = -\frac{16}{3}\,ql^2 = -5{,}33\,ql^2, \quad V_A = \frac{16}{3}\,ql = 5{,}33\,ql, \quad H_A = \frac{10\sqrt{3}}{9}\,ql = 1{,}92\,ql$$

$$R_B = \frac{37}{3}\,ql = 12{,}33\,ql, \quad R_C = \frac{11\sqrt{3}}{9}\,ql = 2{,}12\,ql$$

Zapiszemy jeszcze raz równanie momentów względem punktu A dla całego układu.

$$\sum_i M_{iA} = 0: \quad -M_A - W \cdot 3l - P_y \cdot 9l + R_B \cdot 4l + R_C \cdot \sin\gamma \cdot 7l =$$

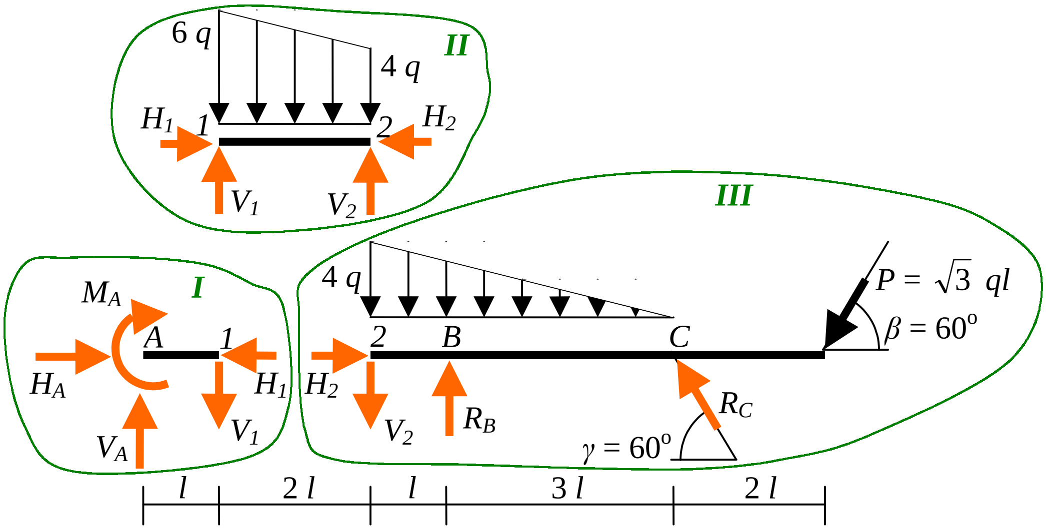
$$= -(-5{,}33\,ql^2) - 18\,ql \cdot 3l - 1{,}5\,ql \cdot 9l + 12{,}33\,ql \cdot 4l + 2{,}12\,ql \cdot 0{,}866 \cdot 7l =$$

$$= 0{,}0014\,ql^2 \approx 0$$

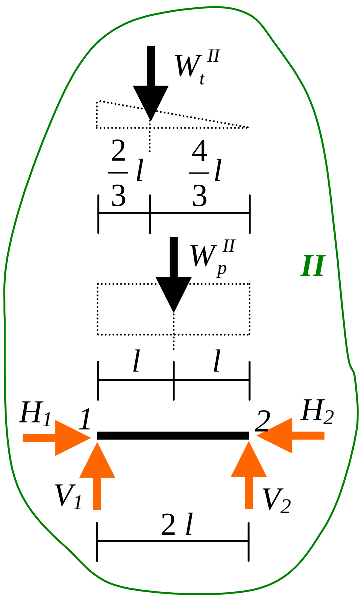
Otrzymany wynik nie świadczy o popełnieniu błędu, jest natomiast konsekwencją zaokrąglenia wartości reakcji.

W tym samym zadaniu wyznaczymy reakcje **bez konieczności** rozwiązywania układu dwu równań z dwiema niewiadomymi. Rozważany układ belkowy podzielimy na pojedyncze belki, zwane podukładami.

Poniższy rysunek przedstawia schemat pracy układu belkowego.



Rozwiązywanie zadania rozpoczynamy od części (*II*), która w punkcie *1* i *2* połączona jest przegubowo z sąsiednimi belkami, natomiast nie jest połączona z podłożem.



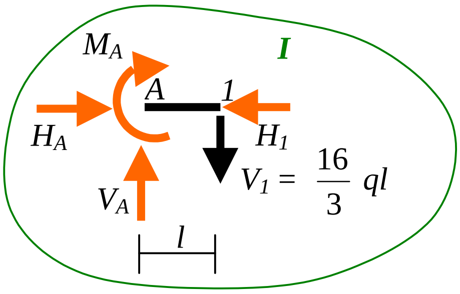
W przegubach *1* i *2* na część (*II*) układu działają nieznane oddziaływania H_1, V_1, H_2 i V_2. Oddziaływania pionowe V_1 i V_2 możemy wyznaczyć zapisując równania równowagi dla części (*II*). W równaniu momentów względem punktu *1* dla części (*II*) wystąpi tylko niewiadoma V_2, natomiast momenty sił H_1, V_1 i H_2 względem przegubu *1* są równe zeru, gdyż ich linie działania przechodzą przez punkt *1*.

$$\sum_i M_{i1}^{II} = 0: \qquad V_2 \cdot 2l - W_p^{II} \cdot l - W_t^{II} \cdot \frac{2}{3} l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_2 = \frac{14}{3} ql$$

W celu wyznaczenia siły V_1 możemy zapisać równanie rzutów sił na oś pionową lub równanie momentów względem punktu *2* dla części (*II*). Równanie rzutów sił na oś pionową ma postać:

$$\sum_i P_{iy}^{II} = 0: \qquad V_1 + V_2 - W_p^{II} - W_t^{II} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_1 = \frac{16}{3} ql$$

Korzystając z wyznaczonej wartości V_1 (na schemacie siła oznaczona jest czarnym kolorem) zapiszemy równania równowagi dla części (I) układu.



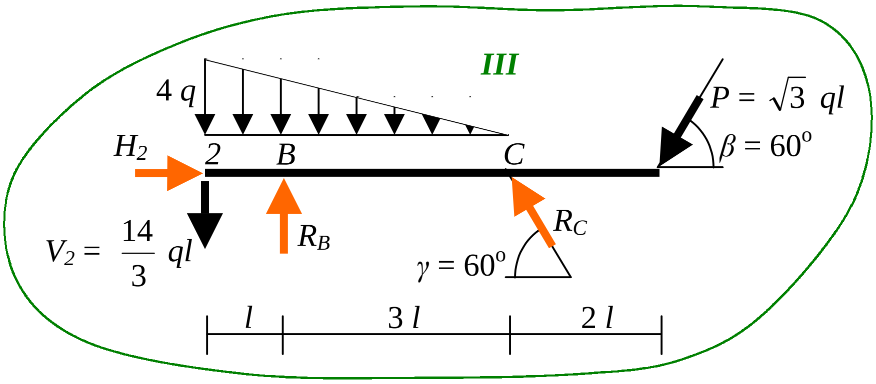
Z równania rzutów sił na oś pionową dla części (I) obliczymy wartość reakcji V_A.

$$\sum_i P_{iy}^I = 0: \qquad V_A - V_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_A = \frac{16}{3}\,ql$$

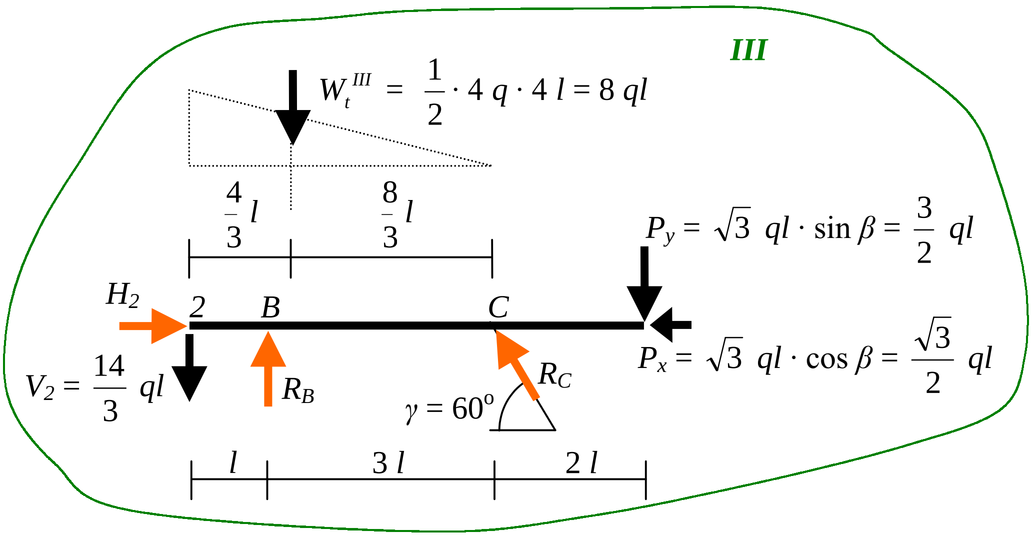
Jako kolejne zapiszemy równanie momentów względem punktu A dla części (I) układu.

$$\sum_i M_{iA}^I = 0: \qquad -M_A - V_1 \cdot l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_A = -\frac{16}{3}\,ql^2$$

Niewiadome reakcje R_B i R_C wyznaczymy korzystając z równań równowagi dla części (III) układu. Wartość oddziaływania V_2 jest już znana, a więc na schemacie siła ta jest oznaczona kolorem czarnym.



Zastąpimy obciążenie ciągłe, działające na część (III) układu, siłą wypadkową W_t^{III}, natomiast siłę skupioną P jej składowymi: pionową i poziomą.



Z równania momentów względem punktu C dla części (III) wyznaczymy reakcję R_B. Momenty pozostałych niewiadomych sił H_2 i R_C względem punktu C są równe zeru, gdyż ich linie działania przechodzą przez ten punkt.

$$\sum_i M_{iC}^{III} = 0: \qquad W_t^{III} \cdot \frac{8}{3}\, l + V_2 \cdot 4\, l - P_y \cdot 2\, l - R_B \cdot 3\, l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_B = \frac{37}{3}\, ql$$

Reakcję R_C wyznaczymy z równania rzutów sił na oś pionową dla części (III) układu.

$$\sum_i P_{iy}^{III} = 0: \qquad R_B - V_2 - P_y + R_C \cdot \sin\gamma - W_t^{III} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_C = \frac{11\sqrt{3}}{9}\, ql$$

Niewiadomą H_A możemy wyznaczyć z równania rzutów sił na oś poziomą dla całego układu.

$$\sum_i P_{ix} = 0: \qquad H_A - R_C \cdot \cos\gamma - P_x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H_A = \frac{10\sqrt{3}}{9}\, ql.$$

Wyznaczenie reakcji drugim sposobem jest korzystniejsze, gdyż nie wiąże się z koniecznością rozwiązywania układu dwu równań z dwiema niewiadomymi. Należy jednak dodatkowo wyznaczyć oddziaływania pionowe V_1 i V_2 w przegubach 1 i 2, chociaż w poleceniu do zadania niewiadome te nie były wymienione. Natomiast nie wyznaczamy oddziaływań poziomych H_1 i H_2, gdyż w żadnym równaniu równowagi, wykorzystywanym do rozwiązania zadania, nie pojawiają się te niewiadome. Ze względu na identyczne wyniki rozwiązania zadania przy zastosowaniu obu sposobów pomijamy powtórne wykonanie sprawdzenia.