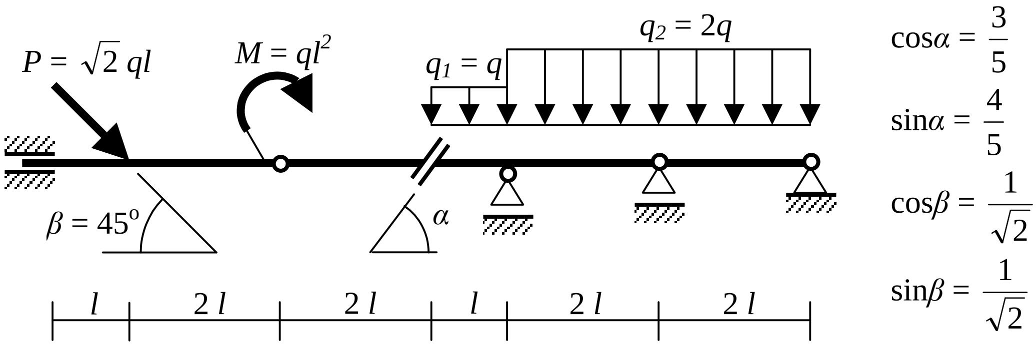
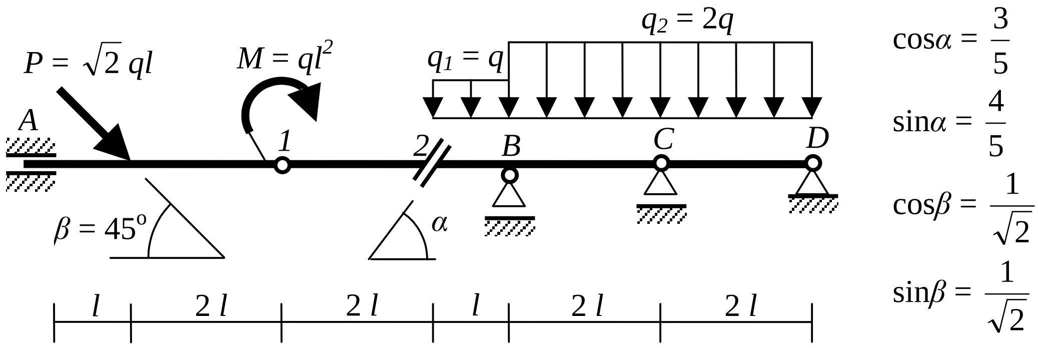
Przykład 2.4. Układ belkowy złożony

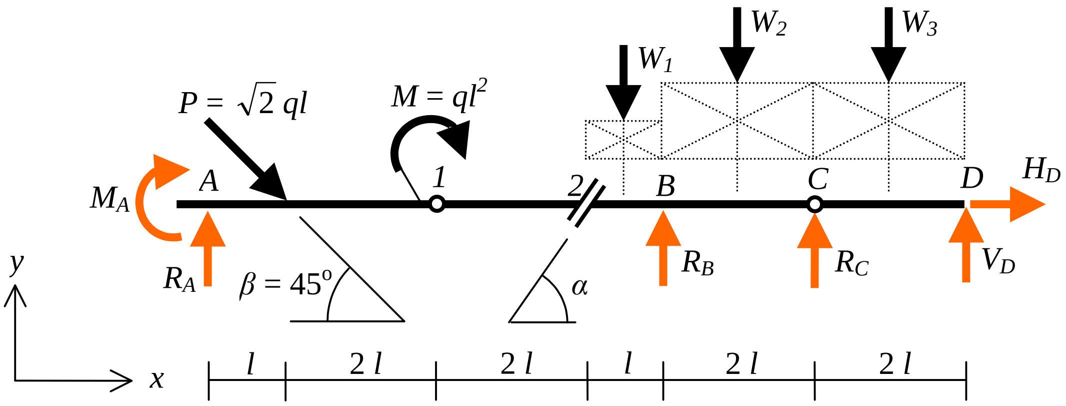
Polecenie: wyznaczyć reakcje podporowe oraz oddziaływania w połączeniach przegubowych i w teleskopie dla poniższego układu obciążonego obciążeniem ciągłym o stałym natężeniu $q_1 = q$ i $q_2 = 2q$, siłą skupioną $P = \sqrt{2}\,ql$ oraz momentem skupionym $M = ql^2$.



Przyjmujemy oznaczenia dla podpór: A, B, C i D oraz dla połączeń: przegubowego *1* i teleskopowego *2*.



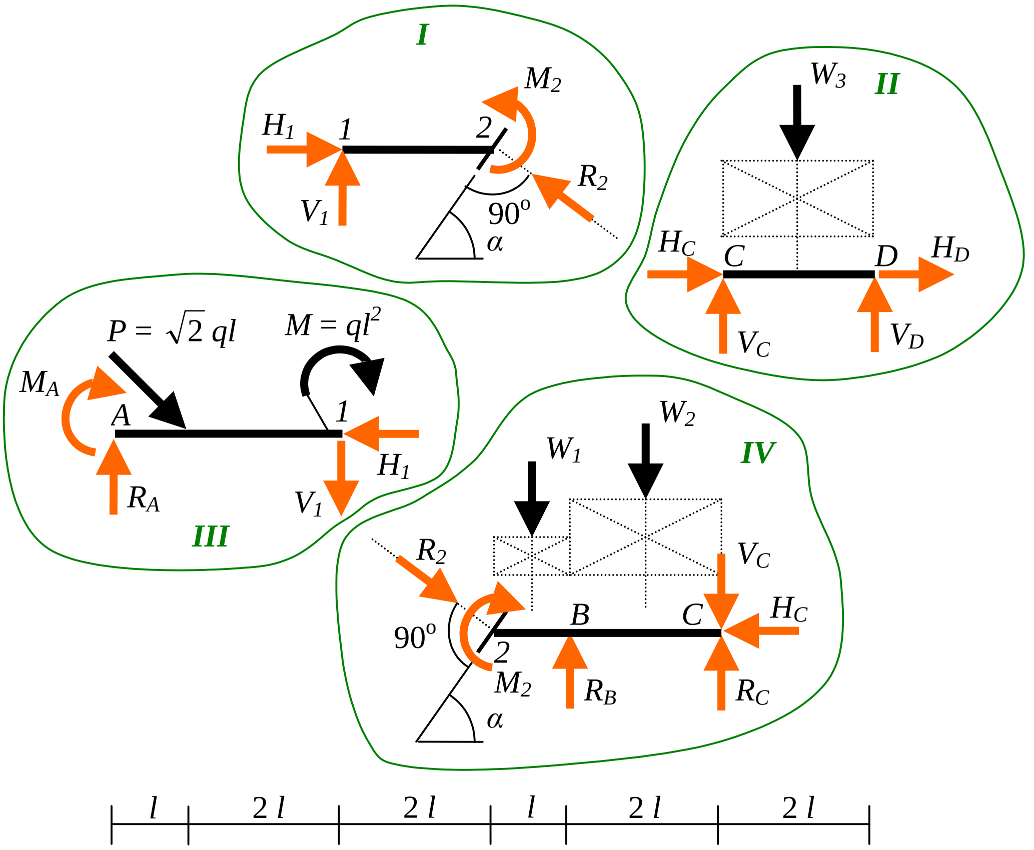
Uwalniamy układ od więzów zastępując podpory reakcjami. Oznaczona literą A podpora jest tuleją, a więc w punkcie A działają następujące reakcje: reakcja pionowa R_A (prostopadła do kierunku możliwego przesuwu) oraz moment M_A. W miejscu podpory przegubowej przesuwnej B działa reakcja pionowa R_B (prostopadła do kierunku możliwego przesuwu), podobnie w punkcie C działa reakcja pionowa R_C. Prawa podpora, oznaczona literą D, jest podporą przegubową nieprzesuwną, zatem w punkcie D działają dwie niezależne od siebie składowe reakcji: pionowa V_D i pozioma H_D. Obciążenie ciągłe $q_1=q$ zastępujemy wypadkową W_1, zaś $q_2=2q$ dwiema wypadkowymi W_2 i W_3.



Wypadkowe obciążenia ciągłego wynoszą:

$$W_1 = q_1 \cdot l = q \cdot l = ql$$
$$W_2 = q_2 \cdot 2l = 2q \cdot 2l = 4ql$$
$$W_3 = q_2 \cdot 2l = 2q \cdot 2l = 4ql$$

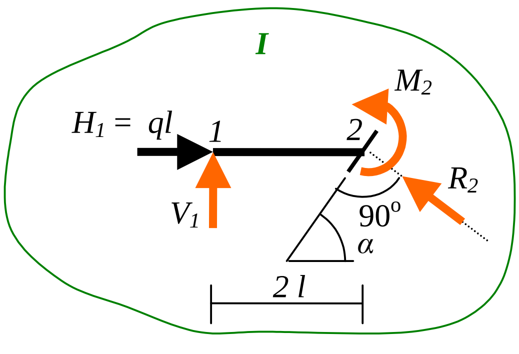
Dzielimy złożony układ belkowy na belki pojedyncze (podukłady), tworząc schemat pracy rozpatrywanego układu. W połączeniu przegubowym *1* działają dwie niezależne składowe oddziaływania: pionowa V_1 i pozioma H_1. Podobnie w połączeniu przegubowym C występują dwie niezależne składowe oddziaływania: pionowa V_C i pozioma H_C. Natomiast w połączeniu teleskopowym *2* występuje oddziaływanie R_2 o kierunku prostopadłym do okładek teleskopu oraz moment M_2.



Jako pierwsze zapiszemy równanie rzutów sił na oś poziomą dla (*III*) części układu, w celu obliczenia oddziaływania poziomego H_1 w przegubie *1*.

$$\sum_i P_{ix}^{III} = 0: \qquad \sqrt{2}\,ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - H_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H_1 = ql$$

Po wyznaczeniu wartości oddziaływania H_1 zapiszemy równanie rzutów sił na oś poziomą dla (*I*) części układu, z którego obliczymy wartość oddziaływania R_2 w teleskopie *2*.



$$\sum_i P_{ix}^I = 0: \qquad H_1 - R_2 \cdot \cos(\,90^o - \alpha\,) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_2 = \frac{5}{4}\,ql$$

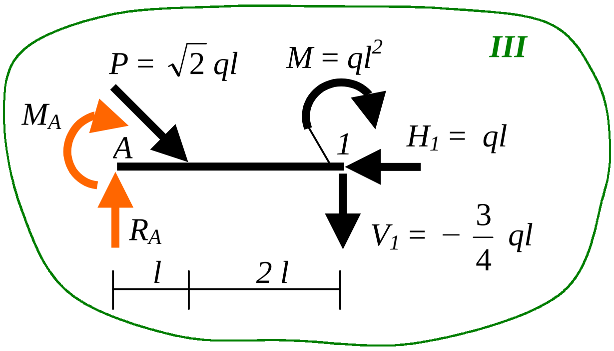
Z równania rzutów sił na oś pionową dla (*I*) części układu możemy już wyznaczyć oddziaływanie pionowe V_1 w przegubie *1*.

$$\sum_i P_{iy}^I = 0: \qquad V_1 + R_2 \cdot \cos\alpha \;= 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_1 = -\,\frac{3}{4}\,ql$$

Ostatnim równaniem zapisanym dla (*I*) części układu będzie równanie momentów względem punktu *2*, z którego obliczymy wartość oddziaływania M_2 w teleskopie *2*. W równaniu tym nie wystąpią oddziaływania H_1 i R_2, ponieważ linie działania tych sił przechodzą przez punkt *2*.

$$\sum_i M_{i2}^I = 0: \qquad M_2 - V_1 \cdot 2l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_2 = -\,\frac{3}{2}\,ql^2$$

Reakcję pionową R_A na podporze *A* możemy wyznaczyć z równania rzutów sił na oś pionową dla (*III*) części układu.



$$\sum_i P_{iy}^{III} = 0: \qquad R_A - \sqrt{2}\,ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - V_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_A = \frac{1}{4}\,ql$$

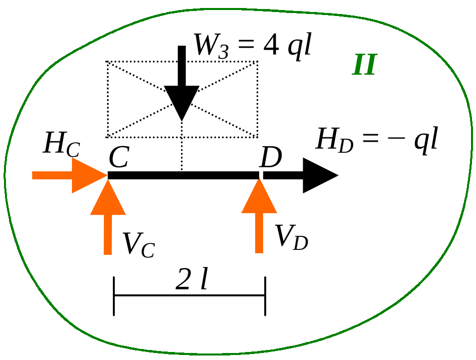
W celu wyznaczenia momentu podporowego M_A w tulei *A* zapiszemy równanie momentów względem punktu *A* dla (*III*) części układu.

$$\sum_i M_{iA}^{III} = 0: \qquad -M_A - \sqrt{2}\,ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot l - M - V_1 \cdot 3l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_A = \frac{1}{4}\,ql^2$$

Reakcję poziomą na podporze *D* obliczymy z równania rzutów sił na oś poziomą dla całego układu.

$$\sum_i P_{ix} = 0: \qquad \sqrt{2}\,ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + H_D = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H_D = -\,ql$$

Z równania momentów względem punktu *C* dla (*II*) części układu wyznaczymy reakcję pionową V_D na podporze *D*. W równaniu tym nie wystąpią oddziaływania V_C i H_C oraz reakcja H_D, gdyż linie działania tych sił przechodzą przez punkt *C*.



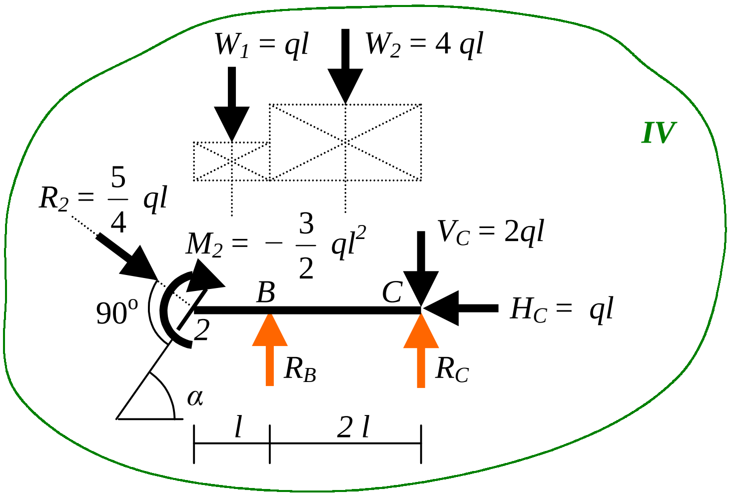
$$\sum_i M_{iC}^{II} = 0: \qquad V_D \cdot 2l - W_3 \cdot l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_D = 2ql$$

Korzystając z równania rzutów sił na oś pionową dla (*II*) części układu wyznaczymy oddziaływanie pionowe V_C w przegubie C, natomiast z równania rzutów sił na oś poziomą dla (*II*) części układu wyznaczymy oddziaływanie poziome H_C.

$$\sum_i P_{iy}^{II} = 0: \qquad V_C + V_D - W_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_C = 2ql$$

$$\sum_i P_{ix}^{II} = 0: \qquad H_C + H_D = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H_C = ql$$

Aby wyznaczyć reakcję R_B zapiszemy równanie momentów względem punktu C dla (*IV*) części układu.



$$\sum_i M_{iC}^{IV} = 0: \qquad R_2 \cdot \cos\alpha \cdot 3l - M_2 - R_B \cdot 2l + W_1 \cdot \frac{5}{2}l + W_2 \cdot l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_B = \frac{41}{8}\,ql$$

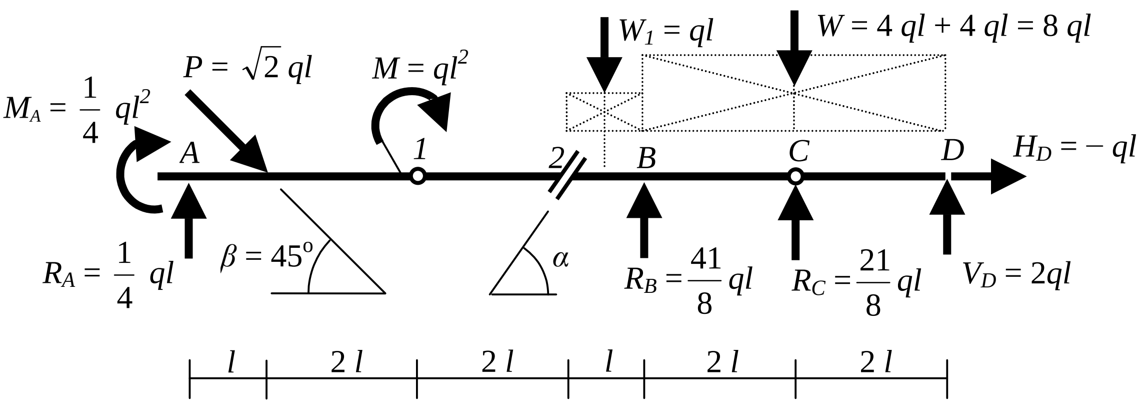
Jako ostatnią niewiadomą wyznaczamy reakcję R_C z równania rzutów sił na oś pionową zapisanego dla (*IV*) części układu.

$$\sum_i P_{iy}^{IV} = 0: \qquad R_C + R_B - R_2 \cdot \cos\alpha - W_1 - W_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_C = \frac{21}{8}\,ql$$

W rozwiązaniu zadania nie wykorzystaliśmy równania rzutów sił na oś poziomą dla (*IV*) części układu. Zapiszemy to równanie w celu sprawdzenia poprawności wykonanych obliczeń.

$$\sum_i P_{ix}^{IV} = 0: \qquad R_2 \cdot \cos(\,90^o - \alpha\,) - H_C = \frac{5}{4}\,ql \cdot \frac{4}{5} - ql = ql - ql = 0$$

Równanie spełnione jest tożsamościowo.



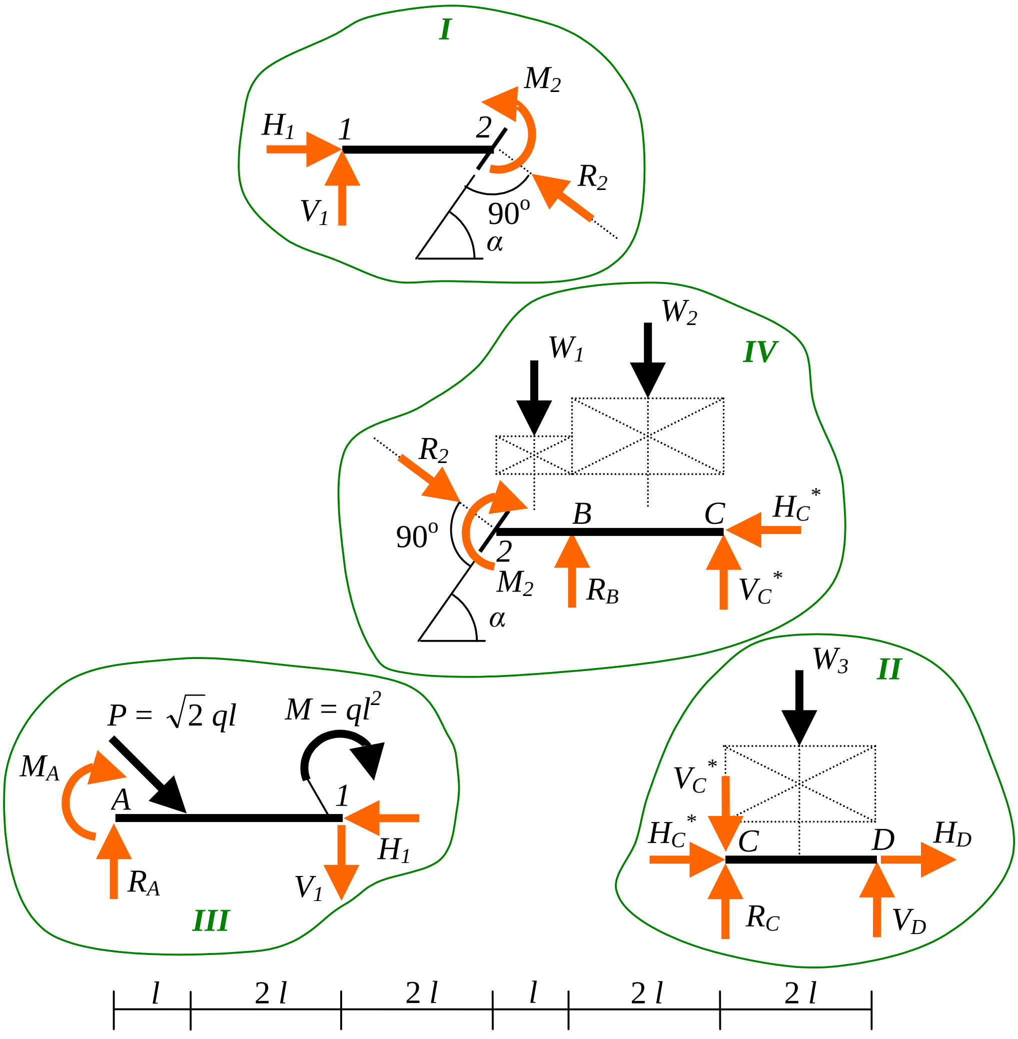
Dla sprawdzenia wyników skorzystamy również z równania zapisanego dla całego układu, na przykład z równania momentów względem punktu *D*. W równaniu tym możemy zastąpić wypadkowe obciążenia ciągłego W_2 i W_3 wypadkową *W*, będącą ich sumą, której linia działania przechodzi przez punkt *C*.

$$\sum_i M_{iD} = 0: \; - M_A - R_A \cdot 10l + \sqrt{2}\, ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 9l - ql^2 + W_1 \cdot \frac{9}{2}\, l + W \cdot 2l - R_B \cdot 4l - R_C \cdot 2l =$$

$$= - \frac{1}{4}\, ql^2 - \frac{1}{4}\, ql \cdot 10l + 9\, ql^2 - ql^2 + ql \cdot \frac{9}{2}\, l + \; 8\, ql \cdot 2l - \frac{41}{8}\, ql \cdot 4l - \frac{21}{8}\, ql \cdot 2l =$$

$$= ql^2 \left(- \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 9 - 1 + \frac{9}{2} + 16 - \frac{41}{2} - \frac{21}{4}\right) = 0$$

Powyższe równanie też spełnione jest tożsamościowo.
Ze względu na występowanie podpory przegubowej *C* w miejscu połączenia przegubowego części (*II*) i (*IV*) możemy również przyjąć inny schemat pracy układu.



Wartość reakcji podporowych oraz oddziaływań w przegubie *1* i teleskopie *2* nie zależą od wyboru przyjętego do obliczeń schematu pracy układu belkowego (jednego z dwu prezentowanych). Natomiast wartości oddziaływań pionowych w przegubie *C* będą różne ($V_C \neq V_C^*$). W pierwszym schemacie, przyjętym do rozwiązania zadania, są to oddziaływania występujące po prawej stronie podpory *C*. W powyższym schemacie oddziaływania te występują po lewej stronie podpory *C*. Gdyby podpora *C* była podporą przegubową nieprzesuwną, to mogłyby też różnić się oddziaływania poziome w punkcie *C*.