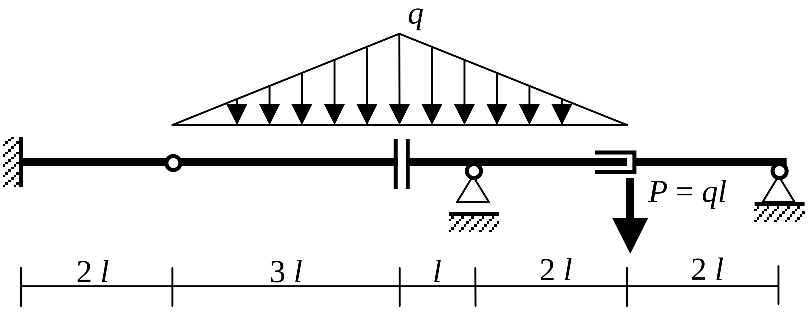
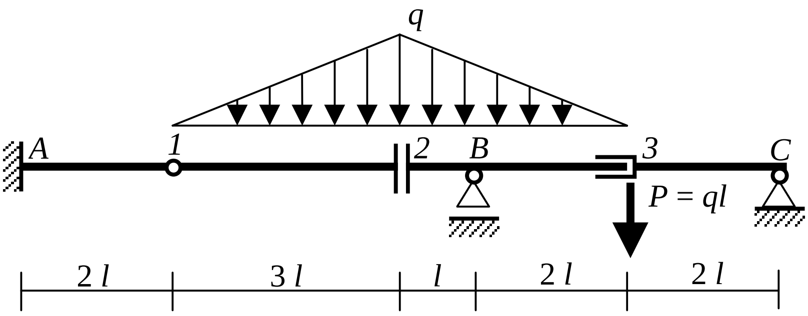
Przykład 2.5. Układ belkowy złożony

Polecenie: wyznaczyć reakcje podporowe oraz oddziaływania w połączeniu przegubowym, w teleskopie i w tulei dla poniższego układu obciążonego obciążeniem ciągłym o natężeniu zmieniającym się liniowo i siłą skupioną $P = ql$.

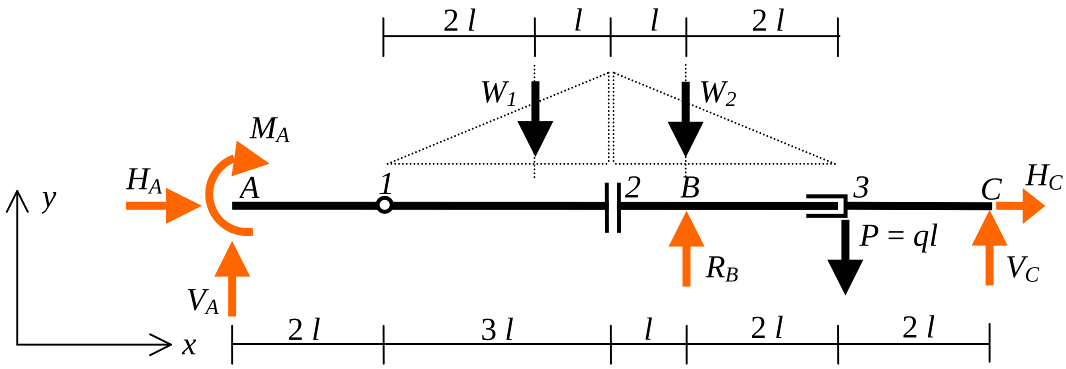


Przyjmujemy oznaczenia dla podpór: A, B, i C oraz dla połączeń: przegubowego *1*, teleskopowego *2* oraz dla tulei *3*.

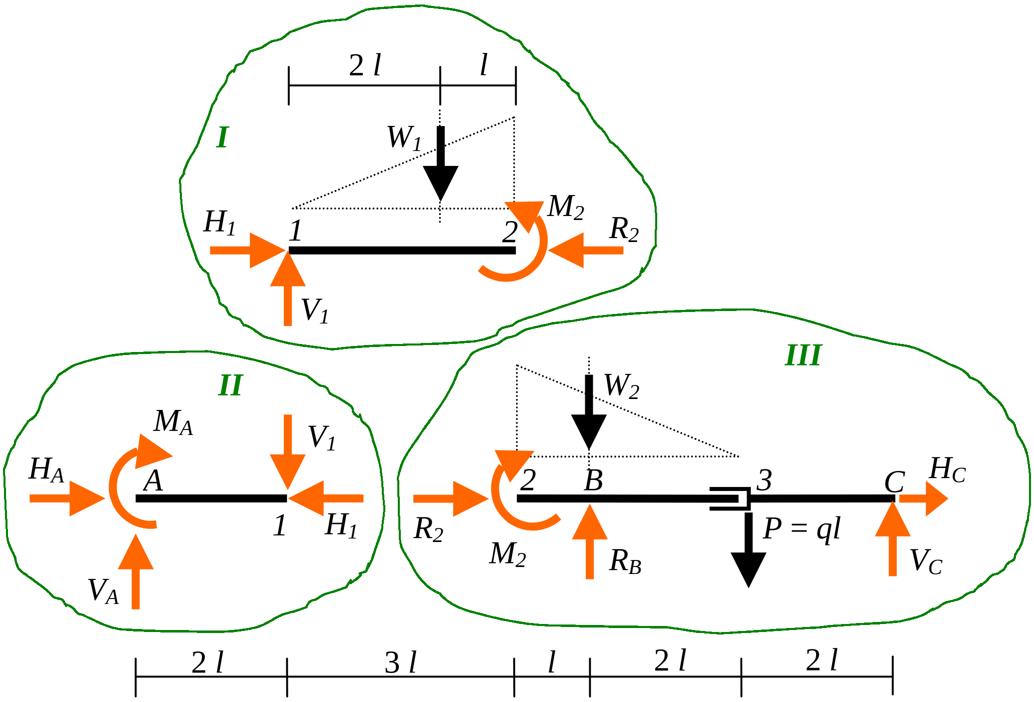


Uwalniamy układ od więzów zastępując podpory reakcjami. Podpora oznaczona literą A jest utwierdzeniem, a więc w punkcie A działają dwie niezależne od siebie składowe reakcji: pionowa V_A i pozioma H_A oraz moment M_A. W miejscu podpory przegubowej przesuwnej B działa reakcja pionowa R_B (prostopadła do kierunku możliwego przesuwu). Prawa podpora, oznaczona literą C, jest podporą przegubową nieprzesuwną, zatem w punkcie C działają dwie niezależne od siebie składowe reakcji: pionowa V_C i pozioma H_C. Obciążenie ciągłe zastępujemy dwiema wypadkowymi W_1 i W_2. Wartości wypadkowych obciążenia ciągłego są równe polom figur pod wykresem rozkładu natężenia obciążenia i wynoszą:

$$W_1 = W_2 = \frac{1}{2} \cdot q \cdot 3l = \frac{3}{2}\, ql.$$



Tworzymy schemat pracy układu belkowego, dzieląc go na trzy podukłady. Część (*I*) układu w miejscu przegubu *1* i teleskopu *2* jest połączona z sąsiednimi podukładami. Nie jest natomiast połączona z podłożem. Część (*II*) układu opiera się na podłożu w miejscu sztywnego zamocowania w punkcie *A*. Część (*III*) układu połączona jest z podłożem w miejscu występowania podpory przegubowej przesuwnej *B* oraz podpory przegubowej nieprzesuwnej *C*. W dalszej części rozwiązania zadania zastosujemy dodatkowy podział części (*III*) układu ze względu na tuleję w punkcie *3*.



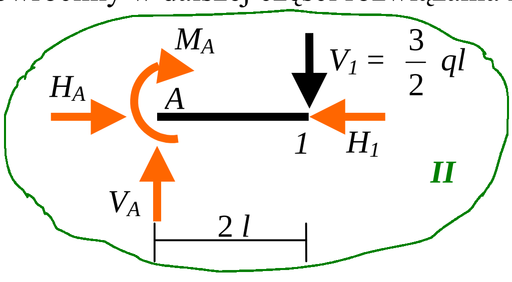
W połączeniu przegubowym *1* działają dwie niezależne składowe oddziaływania: pionowa V_1 i pozioma H_1. Natomiast w połączeniu teleskopowym *2* występuje poziome oddziaływanie R_2 (o kierunku prostopadłym do okładek teleskopu) oraz moment M_2.
Rozwiązanie zadania rozpoczynamy od wyznaczenia oddziaływań dla części (*I*) układu. Z równania rzutów sił na oś pionową wyznaczymy oddziaływanie V_1.

$$\sum_i P_{iy}^{I} = 0: \qquad V_1 - W_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_1 = \frac{3}{2}\,ql$$

W celu wyznaczenia momentu M_2 zapiszemy równanie momentów względem punktu *1*. W równaniu tym nie wystąpią oddziaływania V_1, H_1 oraz R_2 gdyż linie działania tych sił przechodzą przez punkt *1*.

$$\sum_i M_{i1}^{I} = 0: \qquad M_2 - W_1 \cdot 2l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_2 = 3\,ql^2$$

Z trzech równań równowagi dla części (*I*) układu pozostało nam do wykorzystania jedno, a więc nie możemy wyznaczyć pozostałych dwu niewiadomych: H_1 i R_2. Do obliczenia tych oddziaływań poziomych powrócimy w dalszej części rozwiązania zadania.



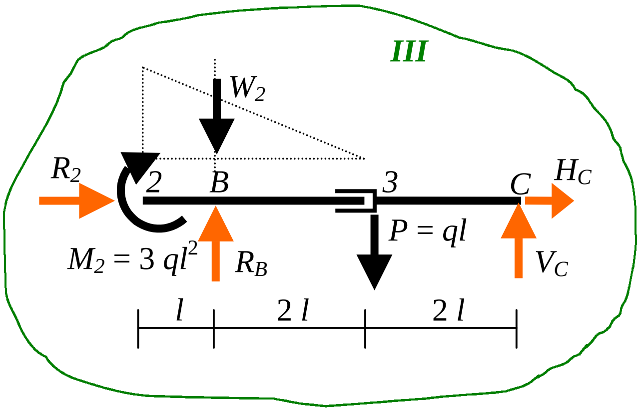
Na powyższym rysunku siła V_1 oznaczona jest kolorem czarnym, jako wielkość znana. Zapiszemy teraz równania równowagi dla części (*II*) układu, korzystając z wartości oddziaływania pionowego V_1. Równanie rzutów sił na oś pionową ma postać:

$$\sum_i P_{iy}^{II} = 0: \qquad V_A - V_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_A = \frac{3}{2}\,ql$$

Z równania momentów względem punktu *A* obliczymy wartość momentu w utwierdzeniu M_A. W równaniu tym nie wystąpi oddziaływanie H_1 oraz składowe reakcji: pionowa V_A i pozioma H_A, gdyż linie działania tych sił przechodzą przez punkt *A*.

$$\sum_i M_{iA}^{II} = 0: \qquad -M_A - V_1 \cdot 2l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_A = -\,3\,ql^2$$

Z równania rzutów sił na oś poziomą dla części (*II*) układu nie możemy wyznaczyć pozostałych dwu niewiadomych: H_1 i H_A.
W dalszej kolejności zajmiemy się równowagą części (*III*) układu. Na rysunku tej części układu moment M_2 oznaczony jest kolorem czarnym, ponieważ jego wartość jest już znana.



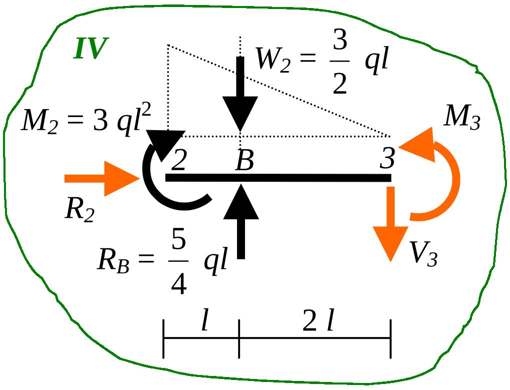
Pierwszym równaniem równowagi dla części (*III*) układu będzie równanie momentów względem punktu *B*. Momenty sił R_2, R_B, W_2 i H_C względem punktu *B* są równe zeru, gdyż linie działania tych sił przechodzą przez punkt *B*.

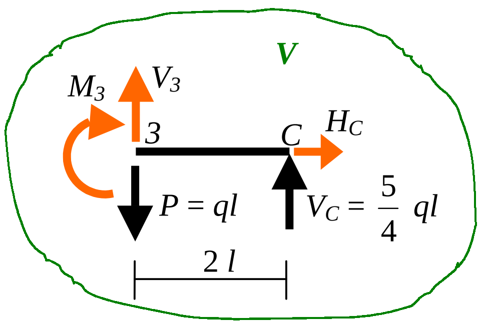
$$\sum_i M_{iB}^{III} = 0: \qquad V_C \cdot 4l - M_2 - P \cdot 2l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_C = \frac{5}{4}\,ql$$

W dalszej kolejności zapiszemy równanie rzutów sił na oś pionową dla części (*III*) układu.

$$\sum_i P_{iy}^{III} = 0: \qquad R_B + V_C - P - W_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_B = \frac{5}{4}\,ql$$

Polecenie do zadania obejmuje również wyznaczenie reakcji poziomych H_A, H_C i oddziaływań poziomych H_1, R_2 oraz oddziaływań w tulei M_3, V_3. W tym celu podzielimy część (*III*) układu na część lewą (*IV*) i prawą (*V*).





W tulei występują jako oddziaływania: siła pionowa V_3 oraz moment M_3. Reakcje R_B i V_C są już znane, a więc na rysunku oznaczone zostały kolorem czarnym. Z równania rzutów sił na oś poziomą dla części (V) układu wyznaczymy składową poziomą H_C.

$$\sum_i P_{ix}^{V} = 0: \qquad H_C = 0$$

Korzystając z równania rzutów sił na oś pionową obliczymy wartość oddziaływania pionowego V_3 w tulei 3.

$$\sum_i P_{iy}^{V} = 0: \qquad V_3 + V_C - P = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_3 = -\frac{1}{4}\, ql$$

Moment M_3 działający w tulei 3 wyznaczymy z równania momentów względem punktu 3 dla (V) części układu . W równaniu tym nie wystąpią siły P, V_3 i H_C, ponieważ ich linie działania przechodzą przez ten punkt.

$$\sum_i M_{i3}^{V} = 0: \qquad V_C \cdot 2l - M_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_3 = \frac{5}{2}\, ql^2$$

Dla części (IV) układu zapiszemy równanie rzutów sił na oś poziomą.

$$\sum_i P_{ix}^{IV} = 0: \qquad R_2 = 0$$

Pozostałe równania dla części (IV) układu muszą być spełnione tożsamościowo, gdyż znane są już wszystkie siły działające na tę część układu.
W celu wyznaczenia oddziaływania poziomego H_1 skorzystamy z równania rzutów sił na oś poziomą dla części (I) układu.

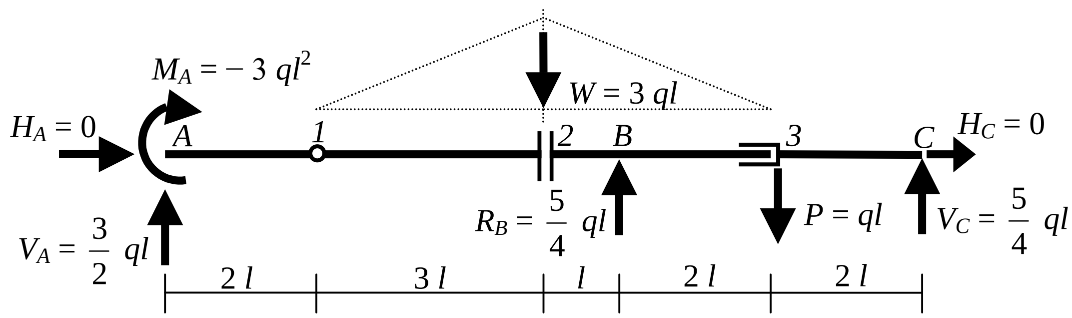
$$\sum_i P_{ix}^{I} = 0: \qquad H_1 - R_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H_1 = 0$$

Składową poziomą H_A obliczymy z równania rzutów sił na oś poziomą dla części (II) układu.

$$\sum_i P_{ix}^{II} = 0: \qquad H_A - H_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H_A = 0$$

Poprawność przeprowadzonych obliczeń sprawdzimy zapisując równanie równowagi dla całego układu, na przykład równanie momentów względem punktu A. Obciążenie ciągłe zastąpimy jedną wypadkową W , której wartość równa jest polu figury pod wykresem rozkładu natężenia obciążenia. Figura ta ma oś symetrii, na której leży jej środek ciężkości. Linia działania wypadkowej przechodzi przez środek ciężkości omawianej figury.

$$W = W_1 + W_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot q \cdot 3l = 3\, ql$$



$$\sum_i M_{iA} = 0: \quad R_B \cdot 6l + V_C \cdot 10l - M_A - W \cdot 5l - P \cdot 8l =$$

$$= \frac{5}{4}\, ql \cdot 6l + \frac{5}{4}\, ql \cdot 10l - \left(-3\, ql^2\right) - 3\, ql \cdot 5l - ql \cdot 8l = \left(\frac{15}{2} + \frac{25}{2} + 3 - 15 - 8 \right) ql^2 = 0$$

Równanie spełnione jest tożsamościowo.