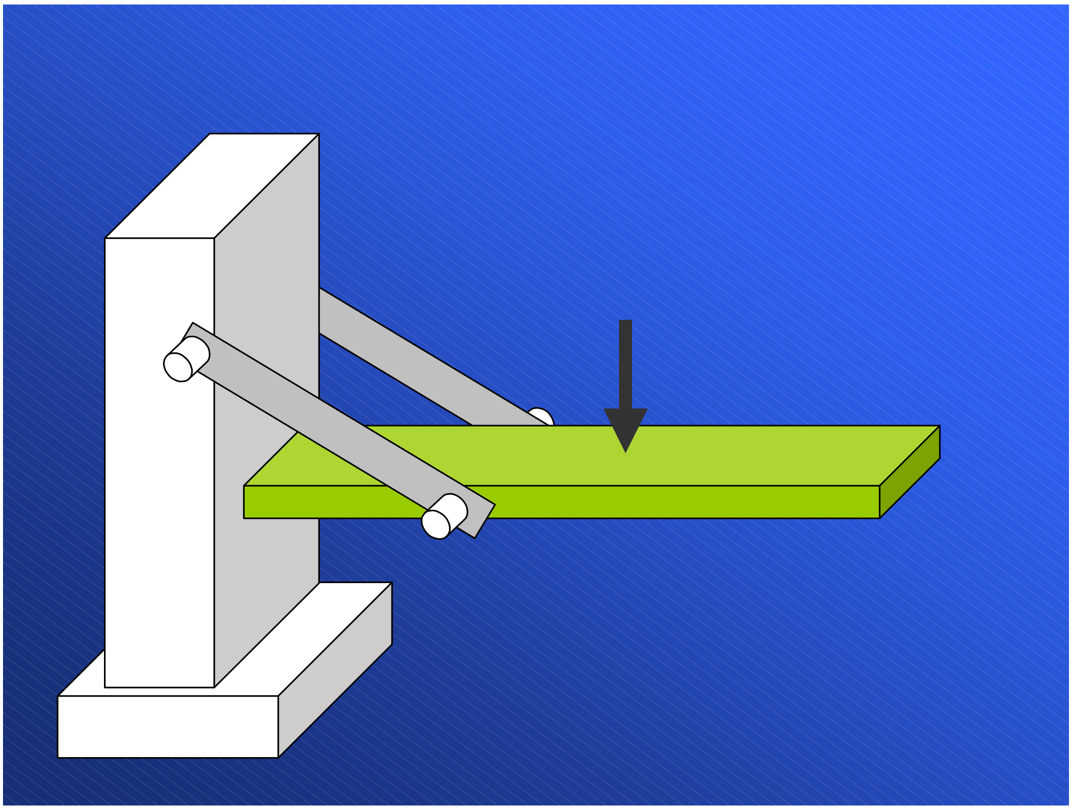
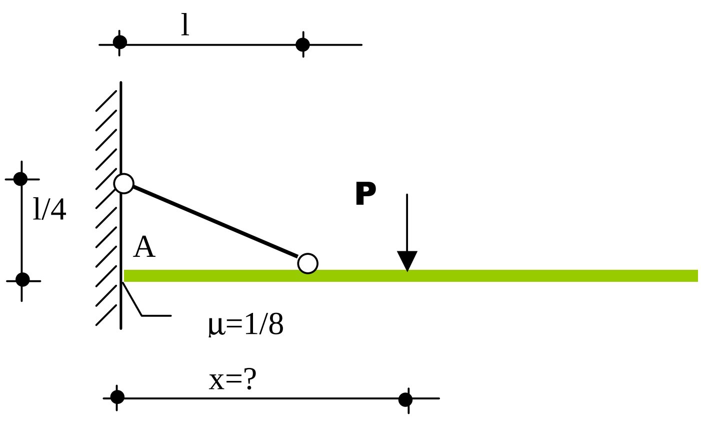
Przykład 4.3. Belka obciążona siłą o zmiennym położeniu



Pozioma belka podwieszona jest na ściągach. Ściągi są w ścianie pionowej na wysokości ¼ l od belki. Drugi koniec ściągów zamocowany jest do belki w odległości l od ściany.   Koniec belki opiera się o ścianę. Współczynnik tarcia belki o ścianę wynosi $\mu = 0.125$. Określ odległość x siły P od ściany, aby belka pozostawała w równowadze.
Poniżej przedstawiono schemat statyczny opisanej konstrukcji.

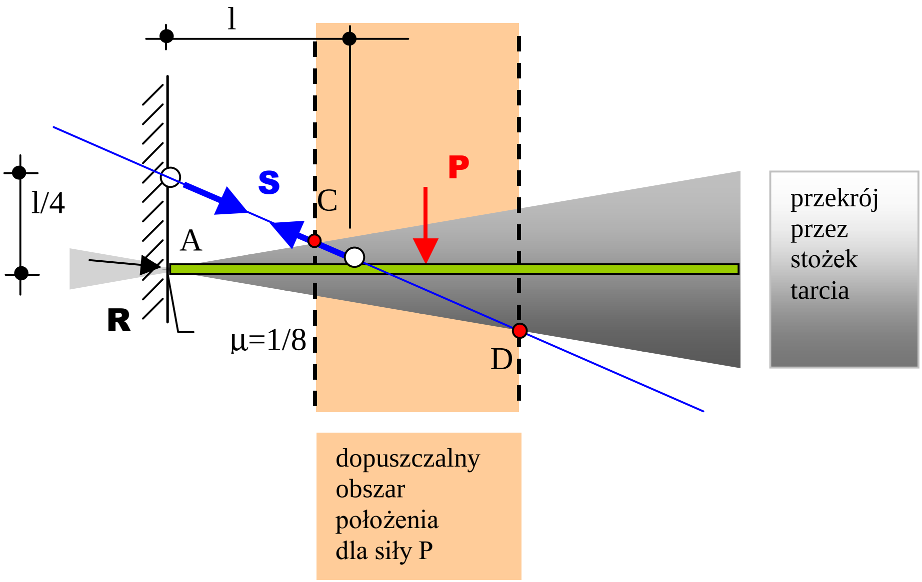


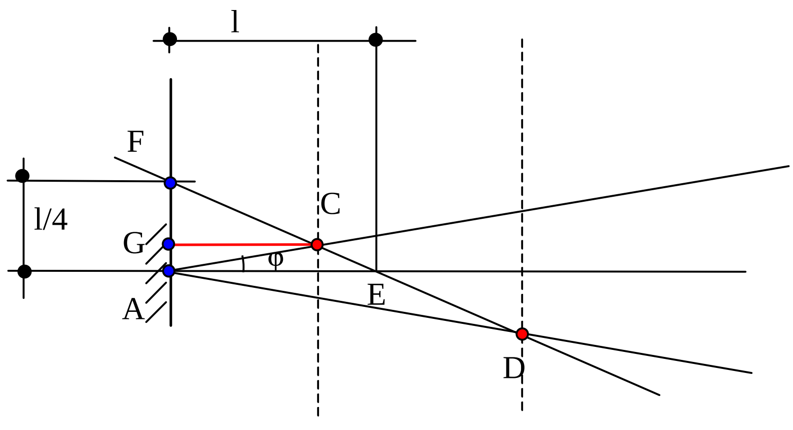
Rozwiązanie metodą graficzną.

Posłużmy się pojęciem stożka tarcia. Na rysunku zamieszczonym poniżej zaznaczono przekrój stożka tarcia utworzonego z linii działania reakcji ściany działającej na belkę w punkcie A. Reakcja może odchylić się od poziomu co najwyżej o kąt φ, którego tangens wynosi μ.

$$\mu = tg\varphi$$

Nie może więc wyjść poza obszar stożka pokazanego na niżej przedstawionym rysunku.
Z drugiej strony ponieważ na rozpatrywaną belkę działają 3 siły: siła czynna **P** siła reakcji **R** i siła w ściągu **S**, równowaga będzie możliwa tylko wówczas, gdy linie działania tych sił przecinać się będą w jednym punkcie. Może to być spełnione tylko wtedy, gdy linia działania siły P przecinać będzie odcinek CD, wyznaczony przez linię działania siły w ściagu **S** i skrajne – maksymalne wychylenia reakcji **R**. Skrajne położenia siły **P**, dla których równowaga będzie jeszcze możliwa, otrzymamy z warunku, że linia działania siły P przechodzi raz przez punkt C i raz przez punkt D. W obydwu przypadkach linia działania reakcji **R** odchylona będzie od normalnej do powierzchni ściany o kąt tarcia φ.





Wyznaczmy położenie punktu C. Obliczymy długość odcinka GC.
Z podobieństwa trójkątów FAE i FGC wynika zależność:

$$\frac{GC}{AE} = \frac{FG}{FA}\text{, stąd } \frac{GC}{l} = \frac{FG}{l/4}\text{, więc } FG = \frac{1}{4}GC\,.$$

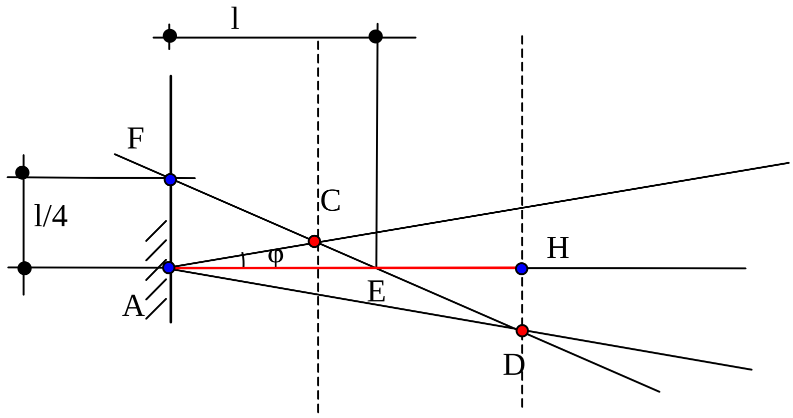
Ponieważ $tg\varphi = \mu = \frac{1}{8}$, więc $\frac{AG}{GC} = \frac{1}{8}$, a stąd $AG = \frac{1}{8}GC$.

Odcinek $AF = l/4 = AG + GF$.

Podstawiając do ostatniego równania wyznaczone wartości FG i AG otrzymamy równanie:

$l/4 = \frac{1}{4}GC + \frac{1}{8}GC$ skąd ostatecznie $GC = 2/3\, l$

Obliczmy teraz drugie skrajne położenie siły P. W tym celu wyznaczymy długość odcinka AH zaznaczonego czerwona linią na rysunku umieszczonym poniżej.



Wykorzystując podobieństwo trójkątów EHD i EAF zapiszemy proporcję:

$$\frac{AH - l}{HD} = \frac{l}{1/4\, l} = 4 \ .$$

Mamy $\frac{HD}{AH} = tg\varphi = \mu = \frac{1}{8} \Rightarrow HD = \frac{1}{8}AH$.

Wstawmy ostatnią zależność do poprzedniej. Otrzymamy:

$$\frac{AH - l}{\frac{1}{8}AH} = 4 \Rightarrow AH = 2l \ .$$

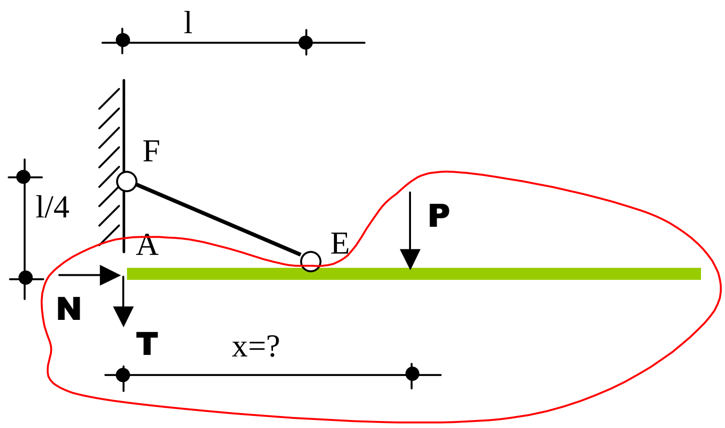
Ostatecznie dla zachowania równowagi siła P może być przykładana do belki w odległości od ściany mieszczącej się w przedziale od $2/3\, l$ do $2l$.

Rozwiązanie metodą analityczną

Reakcję ściany na belkę rozłóżmy na dwie składowe N i T. Przyjmiemy zwrot składowej T w dół jak na rysunku poniżej. Korzystając z równań równowagi obliczymy składowe reakcji.

Z równania momentów względem punktu E wyznaczymy wartość siły **T.** Siła jest zależna od odległości siły P od ściany:

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow T = P(\frac{x}{l} - 1) \ .$$



Składową prostopadłą N do powierzchni ściany wyznaczymy z równania momentów sił względem przegubu F. Również siła N zależy od odległości siły P od ściany.

$\sum M_F = 0 \Rightarrow N = 4\frac{x}{l}P$.

Po wyznaczeniu sił N i T wykorzystamy nierówność Coulomba ograniczającą wartość siły tarcia: $|T| \le \mu \cdot N$. Rozpatrzmy dwa przypadki: $T \ge 0$ i $T \le 0$.

Dla $T \ge 0$ otrzymujemy pierwsze ograniczenie: $P(\frac{x}{l} - 1) \le \mu 4\frac{x}{l}P \Rightarrow (\frac{x}{l} - 1) \le \frac{1}{2}\frac{x}{l} \Rightarrow x \le 2l$.

Ustalmy dalej, że siła tarcia przyjmie zwrot przeciwny do założonego na poprzednim rysunku. Wówczas $T \le 0$ i z nierówności Coulomba otrzymamy drugie ograniczenie:

$-T \le \mu \cdot N \Rightarrow -P(\frac{x}{l} - 1) \le \mu 4\frac{x}{l}P \Rightarrow (\frac{x}{l} - 1) \ge -\frac{1}{2}\frac{x}{l} \Rightarrow x \ge \frac{2}{3}l$.

Łatwo zauważyć, że zwrot siły tarcia zależy od położenia siły P. Jeżeli siła znajduje się po stronie prawej węzła E to siła tarcia skierowana jest w dół. Jeżeli siła P znajduje się po lewej stronie węzła E, wówczas zwrot siły tarcia jest ku górze. Zwrot jest przeciwny do kierunku ruchu jaki wykonywałby koniec belki, gdyby nie było siły tarcia.
Na rysunkach poniżej zilustrowano obydwa te przypadki.