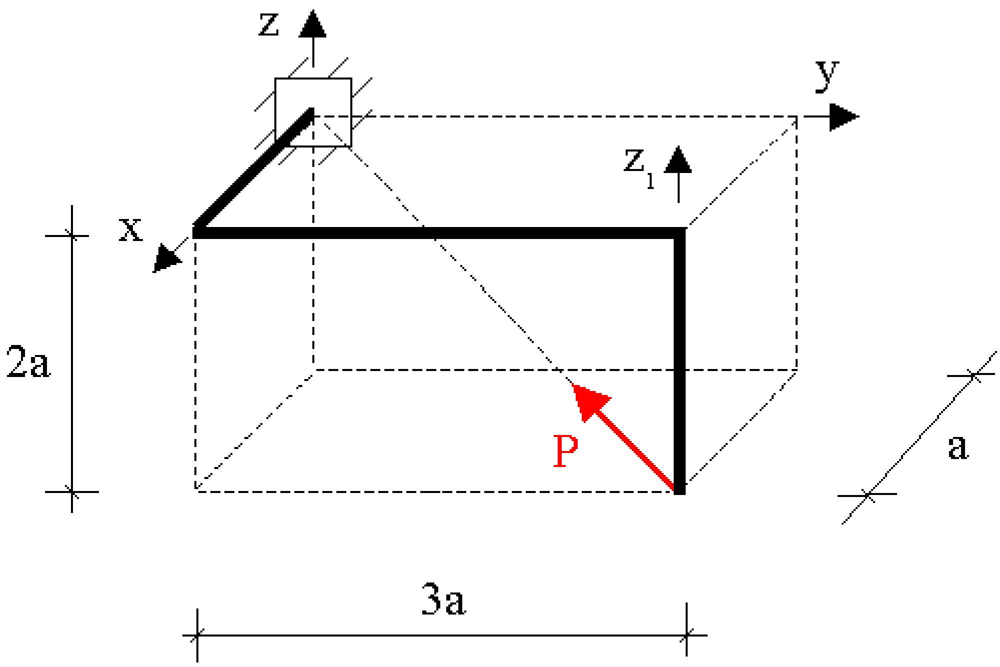
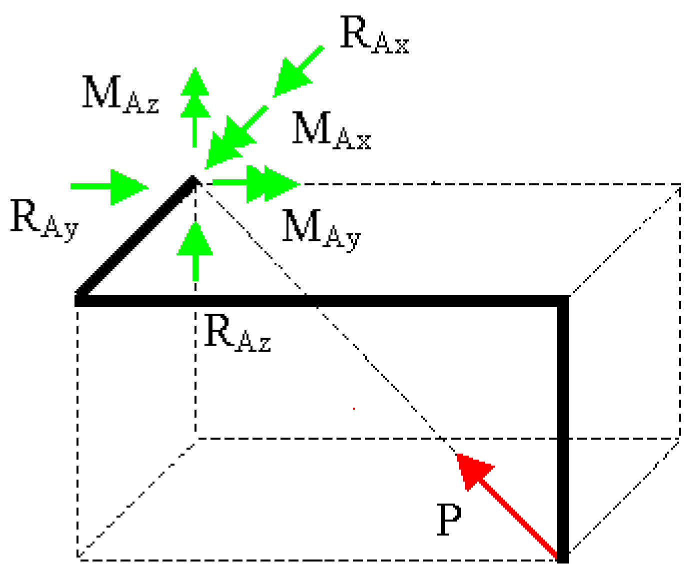
Przykład 5.1. Rama przestrzenna

Wyznaczyć reakcje w ramie przestrzennej o podanym schemacie.



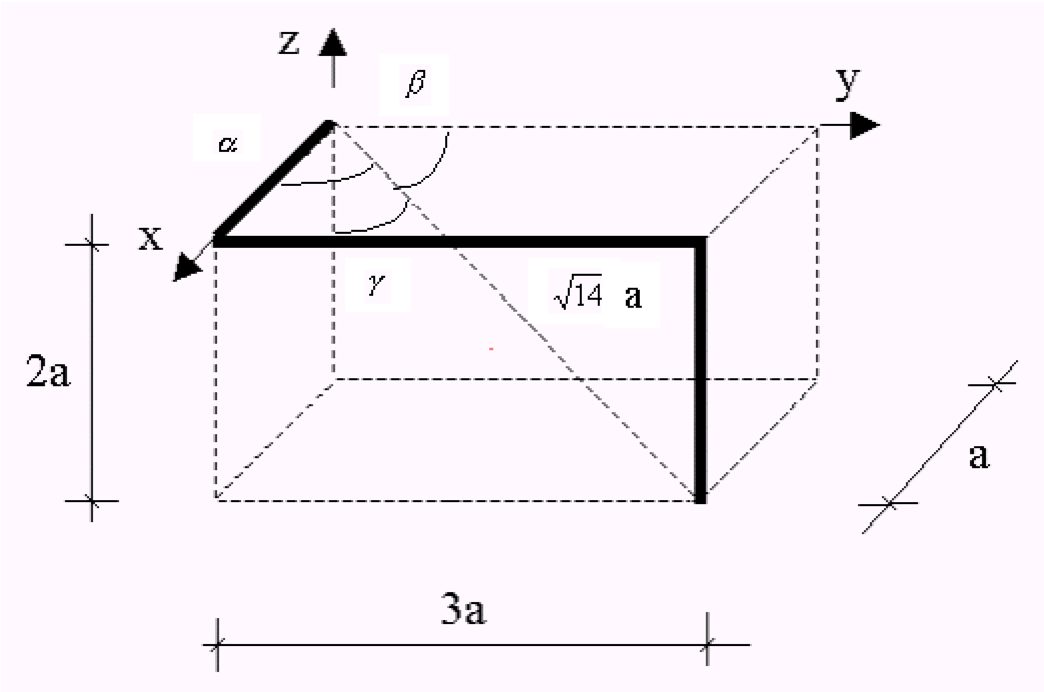
Rozwiązanie.

Uwalniamy układ z więzów wprowadzając odpowiadające im reakcje.



W przekroju A pręta występuje zamocowanie sztywne. Nie znamy sześciu reakcji: R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az},, M_{Ax}, M_{Ay} i M_{Az} . Dla przedstawionej ramy można zapisać sześć warunków równowagi. Zatem układ jest statycznie wyznaczalny.

Oznaczmy kąty, jakie tworzy linia działania siły *P* (kierunek siły pokrywa się z przekątną prostopadłościanu) z dodatnimi kierunkami osi *x, y* i *z* odpowiednio przez α, β, γ .



Cosinusy kierunkowe wynoszą odpowiednio

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{14}a} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\cos\beta = \frac{3a}{\sqrt{14}a} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\cos\gamma = \frac{2a}{\sqrt{14}a} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

gdzie: a, 3a i 2a - wymiary boków prostopadłościanu o kierunku osi x, y i z odpowiednio, $\sqrt{14}a$ - przekątna prostopadłościanu.

Rozłóżmy siłę *P* na składowe odpowiadające osiom x, y i z.

$$P_x = P\cos\alpha = P\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$P_y = P\cos\beta = P\frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$P_z = P\cos\gamma = P\frac{2}{\sqrt{14}}$$

Dowolny przestrzenny układ sił $\overline{P_i}$ znajduje się w równowadze, jeżeli sumy rzutów wszystkich sił na trzy osie układu są równe zeru i sumy momentów wszystkich sił względem trzech osi układu są równe zeru:

$$\sum P_{ix} = 0, \qquad \sum P_{iy} = 0, \qquad \sum P_{iz} = 0$$
$$\sum M_{ix} = 0, \qquad \sum M_{iy} = 0, \qquad \sum M_{iz} = 0$$

Linia działania siły P przechodzi przez punkt A. Zatem moment siły P względem punktu A jest równy zeru. Rzuty tego wektora na osie x, y i z (czyli momenty siły P względem osi x, y i z) tzn. momenty: M_{Ax}, M_{Ay} i M_{Az} też są równe zero. Pozostają do znalezienia nieznane reakcje R_{Ax}, R_{Ay} i R_{Az}.

Zapisujemy warunki równowagi.

$$\sum P_{ix} = 0 \qquad -P\frac{1}{\sqrt{14}} + R_{Ax} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ax} = P\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\sum P_{iy} = 0 \qquad -P\frac{3}{\sqrt{14}} + R_{Ay} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ay} = P\frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\sum P_{iz} = 0 \qquad P\frac{2}{\sqrt{14}} + R_{Az} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Az} = -P\frac{2}{\sqrt{14}}$$

Znak minus oznacza, że zwrot wektora siły R_{Az} jest przeciwny do założonego. Momentowe warunki równowagi są spełnione tożsamościowo.

W celu sprawdzenia poprawności obliczeń korzystamy z warunku równowagi, z którego nie korzystaliśmy poprzednio

$$\sum M_{iz1} = 0 \qquad -R_{Ay} \cdot a + R_{Ax} \cdot 3a = 0 \qquad \rightarrow -P\frac{3}{\sqrt{14}}a + P\frac{3}{\sqrt{14}} = 0$$

Odp.