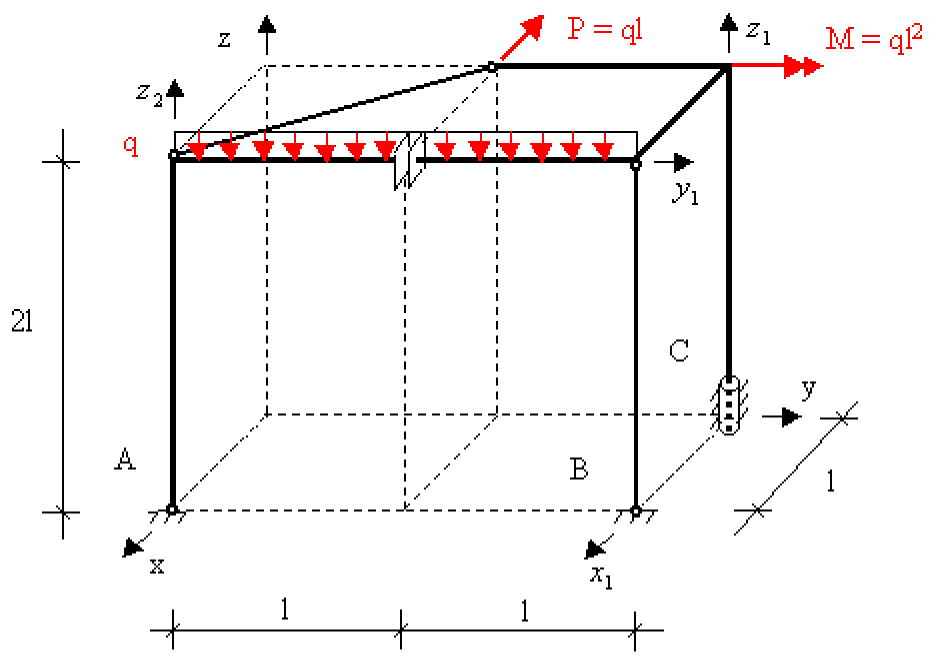
Przykład 5.3. Układ przestrzenny I

Wyznaczyć reakcje i siły w prętach zakończonych obustronnie przegubami, w ramie przestrzennej o podanym schemacie.



Rozwiązanie.

Dowolny przestrzenny układ sił $\overline{P}_i$ znajduje się w równowadze, jeżeli sumy rzutów wszystkich sił na trzy osie układu są równe zeru i sumy momentów wszystkich sił względem trzech osi układu są równe zeru. Tak więc układ równań równowagi ma postać

$$\sum P_{ix} = 0, \qquad \sum P_{iy} = 0, \qquad \sum P_{iz} = 0$$

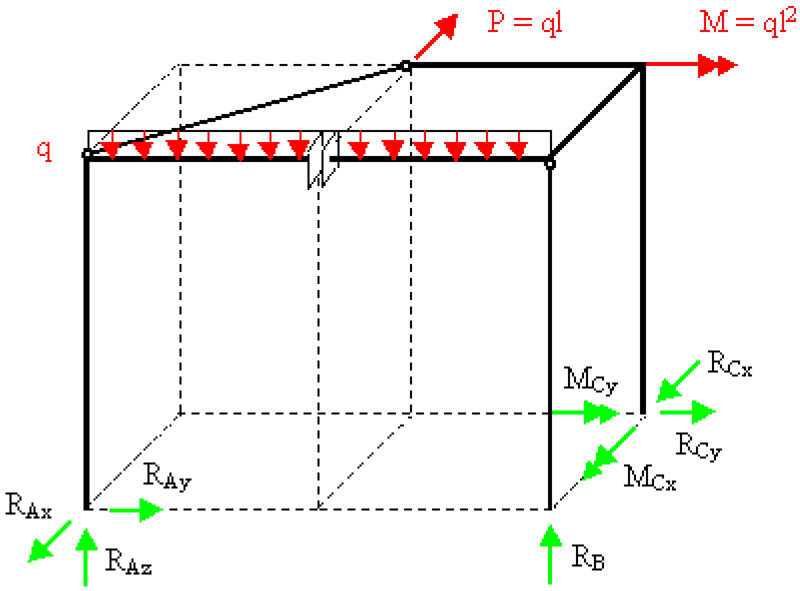
$$\sum M_{ix} = 0, \qquad \sum M_{iy} = 0, \qquad \sum M_{iz} = 0$$

Wskazówki metodyczne:

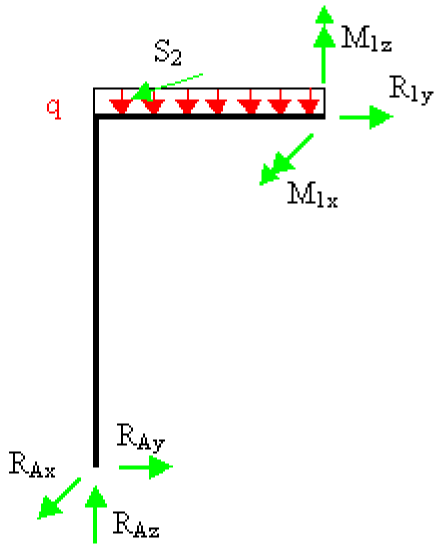
- uwalniamy ciała sztywne z więzów i zastępujemy ich działanie reakcjami (siły bierne),
- rysujemy siły czynne i bierne (reakcje więzów), które obciążają te ciała,

- sprawdzamy czy układ sił jest statycznie wyznaczalny i obieramy układ współrzędnych xyz,
- badamy równowagę sił czynnych (obciążenia zewnętrzne) i sił biernych (reakcje) wykorzystując równania równowagi zapisane powyżej; należy dążyć do tego, aby równania były w miarę możliwości równaniami z jedną niewiadomą,
- rozwiązujemy układ równań i wyznaczamy wielkości niewiadome,
- sprawdzamy poprawność wykonanych obliczeń, korzystając z równoważnego warunku równowagi.

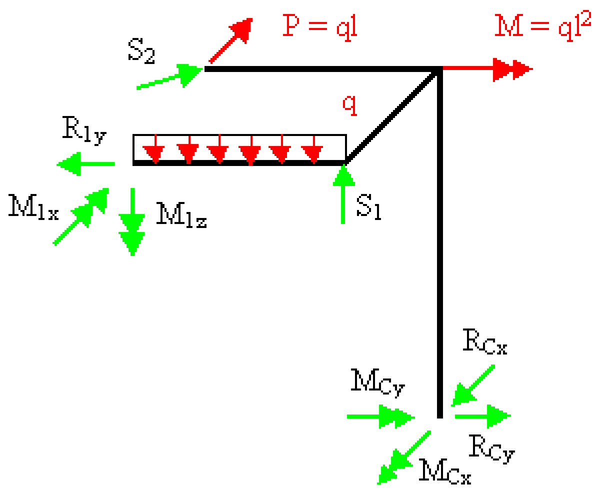
Uwalniamy układ przestrzenny z więzów wprowadzając odpowiadające im reakcje.



W/w układ przestrzenny możemy potraktować jako dwa elementy przestrzenne połączone ze sobą za pośrednictwem teleskopu i ściągu. W punkcie A elementu I występuje podpora przegubowa nieprzesuwna. Element II oparty jest na podporze stałej przegubowej w punkcie B za pośrednictwem pręta dwuprzegubowego, a punkcie C posiada oparcie w postaci tulei. W prętach (obustronnie zakończonych przegubami), które nie są obciążone w przęśle występują tylko siły osiowe. Z równowagi węzła B wynika, że siła S_1 ma tę samą wartość i kierunek działania co reakcja R_B. Nie znamy dwunastu reakcji i oddziaływań: R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}, R_B (lub S_1), R_{Cx}, R_{Cy}, M_{Cx}, M_{Cy}, R_{1y}, M_{1x}, M_{1z} i S_2. Dla przedstawionego na schemacie układu ramowego można zapisać dwanaście warunków równowagi (2 x 6). Zatem układ jest statycznie wyznaczalny. Rozwiązanie tego zadania może przebiegać na wiele sposobów. Zapisując kolejne równania równowagi należy dążyć do tego, aby były to równania z jedną niewiadomą (o ile to możliwe). Pamiętać należy przy tym, że moment siły (siła ≠ 0) względem osi jest równy zeru, jeśli wektor siły jest równoległy do osi lub linia działania siły przecina się z osią. Należy zauważyć, że do rozwiązania niniejszego zadania wystarczy wykorzystać dziewięć równań, bez konieczności obliczania oddziaływań w teleskopie.



Element I



Element II

Zapisujemy kolejno warunki równowagi. Należy zauważyć, że z uwagi na sposób połączenia elementów (teleskop, ściąg poziomy), obciążenia pionowe z elementu I na II i z elementu II na I nie przekazują się.

$\sum P_{iz}^{I} = 0 \qquad R_{Az} - ql = 0 \qquad \rightarrow \qquad R_{Az} = ql$

$\sum P_{iz}^{II} = 0 \qquad S_1 - ql = 0 \qquad \rightarrow \qquad S_1 = ql$

Warunek równowagi dla całości $\sum P_{iz} = 0$ spełniony jest tożsamościowo.

Teleskop nie przenosi także momentu skręcającego ($M_{1y} = 0$). Zatem

$\sum M_{iy1}^{I} = 0 \qquad -R_{Ax} \cdot 2l = 0 \qquad \rightarrow \qquad R_{Ax} = 0$

Z warunku równowagi $\sum M_{iy\,1}^{II} = 0$ otrzymujemy równanie z dwiema niewiadomymi $-R_{Cy} \cdot 2l + M + M_{Cy} = 0$. Można je ewentualnie wykorzystać po rozwiązaniu zadania do sprawdzenia poprawności obliczeń.

Równania równowagi możemy zapisywać zarówno dla całego układu przestrzennego, jak i dla każdej z części z osobna.

$\sum M_{ix1} = 0 \qquad -R_{Az} \cdot 2l + M_{Cx} + 2ql \cdot l = 0 \qquad \rightarrow \qquad M_{Cx} = 0$

$\sum M_{iy} = 0 \qquad -R_B \cdot l - R_{Az} \cdot l + 2ql \cdot l + ql^2 - ql \cdot 2l + M_{Cy} = 0 \qquad \rightarrow \qquad M_{Cy} = ql^2$

$\sum M_{iz1} = 0 \qquad -ql \cdot l + R_{Ay} \cdot l + R_{Ax} \cdot 2l = 0 \qquad \rightarrow \qquad R_{Ay} = ql$

$\sum P_{iy} = 0 \qquad R_{Ay} + R_{Cy} = 0 \qquad \rightarrow \qquad R_{Cy} = -R_{Ay} = -ql$

Znak minus oznacza, że zwrot wektora siły R_{Cy} jest przeciwny do założonego.

$\sum P_{ix} = 0 \qquad R_{Ax} + R_{Cx} - ql = 0 \qquad \rightarrow \qquad R_{Cx} = ql$

Siłę S_2 w ściągu obliczymy z warunku (teleskop przekazuje tylko siłę prostopadłą do powierzchni teleskopu)

$\sum P_{ix}^{I} = 0 \qquad R_{Ax} + S_2 \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad S_2 = 0$

Warunek równowagi dla całości $\sum P_{iz}^{II} = 0$ spełniony jest tożsamościowo.

W celu sprawdzenia poprawności obliczeń korzystamy z warunku równowagi, z którego nie korzystaliśmy poprzednio

$\sum M_{iz2} = 0 \qquad ql \cdot l - R_{Cx} \cdot 2l - R_{Cy} \cdot l = 0 \qquad \rightarrow \qquad ql^2 - 2ql^2 + ql^2 = 0$

W prętach zakończonych obustronnie przegubami występują siły: $S_1 = ql$ (ściskająca) i $S_2 = 0$.