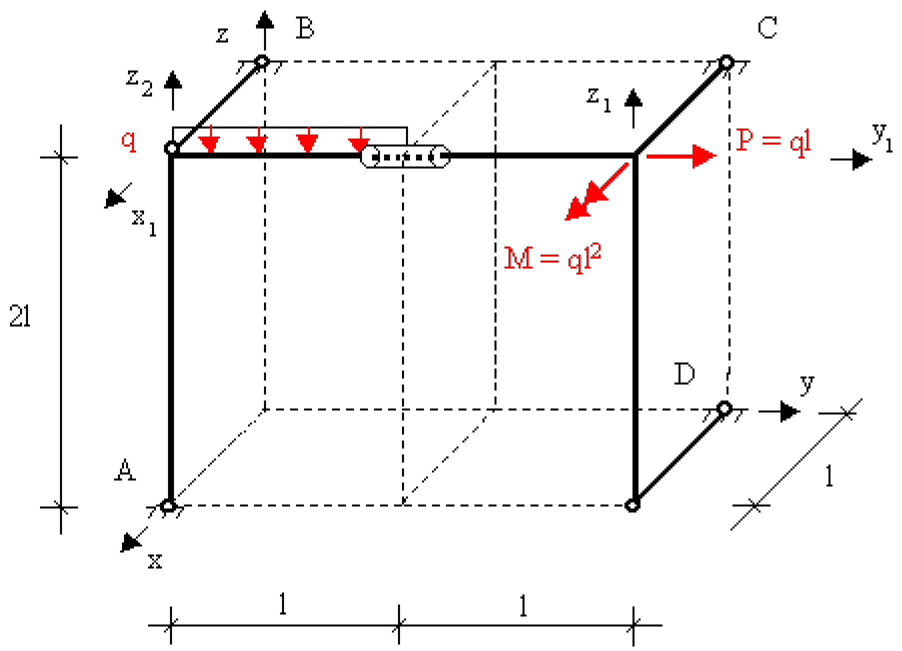
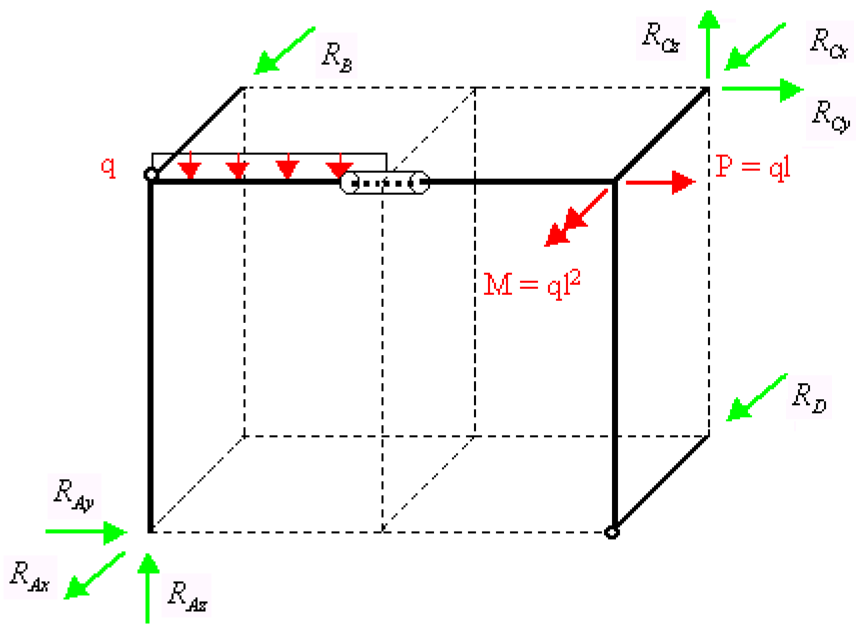
Przykład 5.4. Układ przestrzenny II

Wyznaczyć reakcje i siły w prętach zakończonych obustronnie przegubami, w ramie przestrzennej o podanym schemacie.

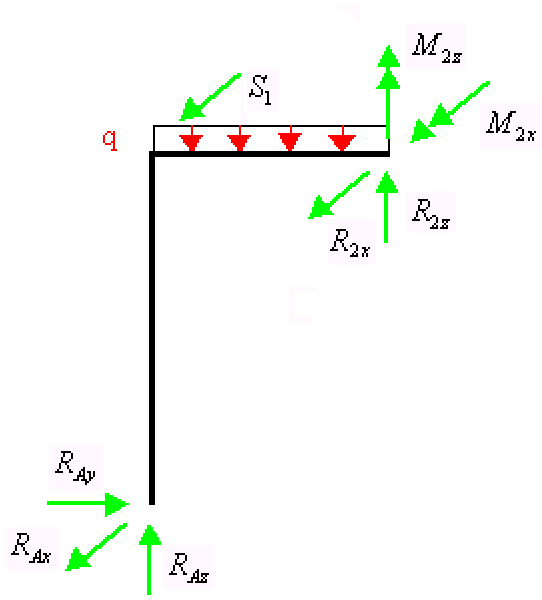


Rozwiązanie.

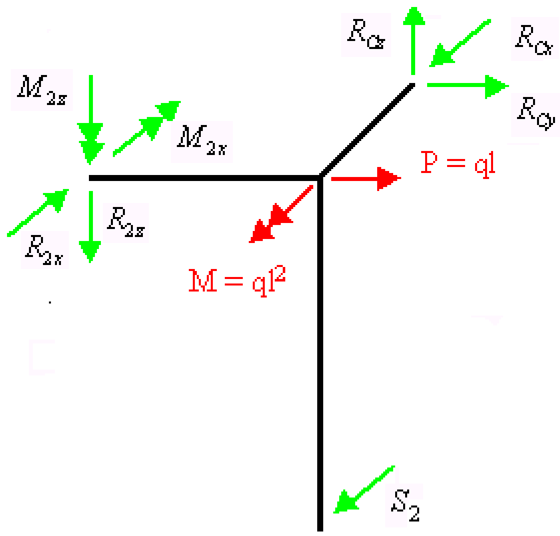
Uwalniamy układ z więzów wprowadzając odpowiadające im reakcje.



Przedmiotowy układ przestrzenny możemy potraktować jako dwa elementy przestrzenne połączone ze sobą za pośrednictwem tulei. Element I oparty jest na podporze przegubowej nieprzesuwnej w punkcie A i na podporze nieprzesuwnej B za pośrednictwem pręta dwuprzegubowego. Element II oparty jest na podporze przegubowej nieprzesuwnej w punkcie C i na podporze nieprzesuwnej D za pośrednictwem pręta dwuprzegubowego. W prętach (obustronnie zakończonych przegubami), które nie są obciążone w przęśle występują tylko siły osiowe. Z równowagi węzła B wynika, że siła S_1 ma tę samą wartość i kierunek działania co reakcja R_B. Podobnie z równowagi węzła D wynika, że siła S_2 ma tę samą wartość i kierunek działania co reakcja R_D. Nie znamy dwunastu reakcji i oddziaływań: R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}, R_B (lub S_1), R_{Cx}, R_{Cy}, R_{Cz}, R_D (lub S_2), R_{2x}, R_{2z}, M_{2x} i M_{2z} . Dla przedstawionego na schemacie układu ramowego można zapisać dwanaście warunków równowagi (2 x 6). Zatem układ jest statycznie wyznaczalny. Zapisując kolejne równania równowagi należy dążyć do tego, aby były to równania z jedną niewiadomą (o ile to możliwe). Pamiętać należy przy tym, że moment siły (siła ≠ 0) względem osi jest równy zeru, jeśli wektor siły jest równoległy do osi lub linia działania siły przecina się z osią. Należy zauważyć, że do rozwiązania niniejszego zadania wystarczy wykorzystać osiem równań, bez konieczności obliczania oddziaływań w tulei.



Element I



Element II

Dowolny przestrzenny układ sił $\overline{P_i}$ znajduje się w równowadze, jeżeli sumy rzutów wszystkich sił na trzy osie układu są równe zeru i sumy momentów wszystkich sił względem trzech osi układu są równe zeru:

$$\sum P_{ix} = 0, \qquad \sum P_{iy} = 0, \qquad \sum P_{iz} = 0$$

$$\sum M_{ix} = 0, \qquad \sum M_{iy} = 0, \qquad \sum M_{iz} = 0$$

Zapisujemy warunki równowagi. Należy zauważyć, że z uwagi na sposób połączenia elementów (tuleja), obciążenia poziome równoległe do osi y z elementu I na II i z elementu II na I nie przekazują się.

$$\sum P_{iy}^{I} = 0 \qquad\qquad R_{Ay} = 0$$

$$\sum P_{iy}^{II} = 0 \qquad\qquad R_{Cy} + P = 0 \qquad\qquad \rightarrow \qquad R_{Cy} = -P = -ql$$

Znak minus oznacza, że zwrot wektora siły R_{Cy} jest przeciwny do założonego.

Warunek równowagi dla całości $\sum P_{iy} = 0$ spełniony jest tożsamościowo.

Tuleja nie przenosi także momentu skręcającego ($M_{1y} = 0$). Zatem

$$\sum M_{iy_1}^{I} = 0 \qquad\qquad -R_{Ax} \cdot 2l = 0 \qquad\qquad \rightarrow \qquad R_{Ax} = 0$$

Równania równowagi możemy zapisywać zarówno dla całego układu przestrzennego, jak i dla każdej z części z osobna.

$$\sum M_{ix1} = 0 \qquad\qquad -ql \cdot \frac{l}{2} + M + R_{Cz} \cdot 2l = 0 \qquad\qquad \rightarrow \qquad R_{Cz} = \frac{-M + \frac{ql^2}{2}}{2l} = -\frac{ql}{4}$$

$$\sum M_{iy1}^{II} = 0 \qquad -S_2 \cdot 2l + R_{Cz} \cdot l = 0 \qquad \rightarrow \qquad S_2 = R_D = \frac{R_{Cz}}{2} = -\frac{ql}{8}$$

$$\sum P_{iz} = 0 \qquad -ql + R_{Az} + R_{Cz} = 0 \qquad \rightarrow \qquad R_{Az} = ql + \frac{ql}{4} = \frac{5}{4}ql$$

$$\sum M_{iz1} = 0 \qquad R_{Ax} \cdot 2l + S_1 \cdot 2l - R_{Cy} \cdot l = 0 \qquad \rightarrow \qquad S_1 = R_B = -\frac{1}{2}ql$$

Znak minus oznacza, że zwroty wektorów sił: R_B, R_{Cz} i R_D są przeciwne do założonych.

$$\sum P_{ix} = 0 \qquad R_{Ax} + S_1 + R_{Cx} + R_D = 0 \qquad \rightarrow \qquad R_{Cx} = \frac{5}{8}ql$$

W celu sprawdzenia poprawności obliczeń korzystamy z warunku równowagi, z którego nie korzystaliśmy poprzednio

$$\sum M_{iz2} = 0 \qquad ql \cdot l - R_{Cx} \cdot 2l - R_{Cy} \cdot l = 0 \qquad \rightarrow \qquad ql^2 - 2ql^2 + ql^2 = 0$$

W prętach zakończonych obustronnie przegubami występują siły: $S_1 = -\frac{1}{2}ql$ (rozciągająca) i $S_2 = -\frac{ql}{8}$ (rozciągająca).