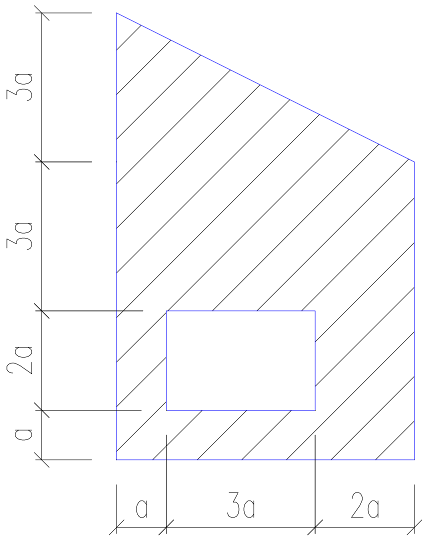
Przykład 6.1 Środek ciężkości figury płaskiej – zadanie 1

Znaleźć środek ciężkości figury przedstawionej poniżej.



Rysunek 1

Położenie środka ciężkości dowolnej figury płaskiej określa się na podstawie wzorów:

$$x_c = \frac{S_y}{A}, \; y_c = \frac{S_x}{A}, \tag{1}$$

gdzie S_x i S_y są statycznymi momentami bezwładności względem osi x i y odpowiednio, A – polem powierzchni figury.

Dla dowolnej figury statyczne momenty bezwładności można obliczyć ze wzorów:

$$S_x = \int_A y \, dA \;, \quad S_y = \int_A x \, dA \,. \tag{2}$$

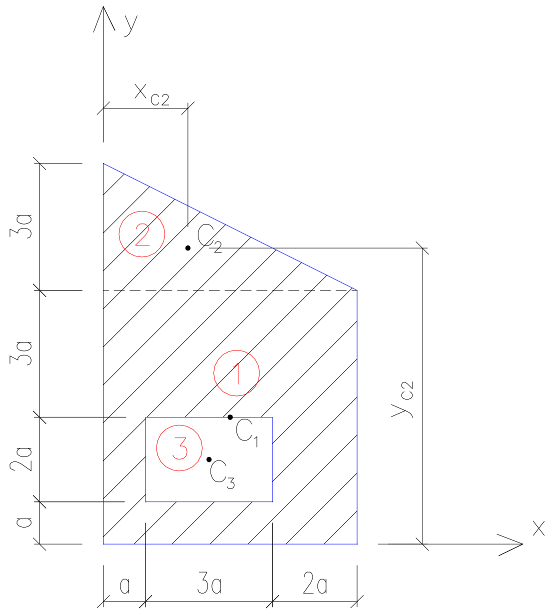
Dla figury składającej się z figur, dla których znane jest położenie środków ciężkości, statyczne momenty bezwładności można określać na podstawie wzorów:

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} A_i \, y_{C_i} \;, \quad S_y = \sum_{i=1}^{n} A_i \, x_{C_i} \tag{3}$$

gdzie A_i, x_{Ci} oraz y_{Ci} oznaczają pole powierzchni i odpowiednią współrzędną środka ciężkości i-tej figury składowej w przyjętym układzie osi.

Dla policzenia położenia środka ciężkości figury z rysunku 1 zastosujemy wzory (1) i (3), gdyż figurę można podzielić na trzy figury, dla których znane jest położenie środków ciężkości: 1 - kwadrat o polu powierzchni bez odejmowania otworu, 2 – trójkąt, 3 – prostokątny otwór.
Przyjmujemy w dowolnym punkcie kartezjański układ współrzędnych (x, y). Często warto przyjąć układ współrzędnych w taki sposób, aby cała rozpatrywana figura znajdowała się w pierwszej ćwiartce tego układu, dzięki czemu współrzędne wszystkich środków ciężkości figur składowych w osiach układu będą dodatnie. Drugim sposobem uproszczenia obliczeń jest usytuowanie układu osi w środku ciężkości jednej z figur składowych.

Na rysunku 2 przedstawiono przyjęty układ osi, podział całej figury na figury składowe oraz położenia środków ciężkości figur składowych.



Rysunek 2

Statyczne momenty bezwładności względem osi x i y obliczamy sumując statyczne momenty bezwładności wszystkich figur składowych, przyjmując dla figur będących otworami pole powierzchni ze znakiem ujemnym:

$$S_x = 6a\,6a\,3a + \frac{1}{2}6a\,3a\left(6a + \frac{1}{3}3a\right) + \left(-3a\,2a\right)\left(a + \frac{1}{2}2a\right) = 108a^3 + 63a^3 - 12a^3 = 159a^3$$

$$S_y = 6a\,6a\,3a + \frac{1}{2}6a\,3a\frac{1}{3}6a + \left(-3a\,2a\right)\left(a + \frac{1}{2}3a\right) = 108a^3 + 18a^3 - 15a^3 = 111a^3$$

Pole powierzchni całej figury wynosi:

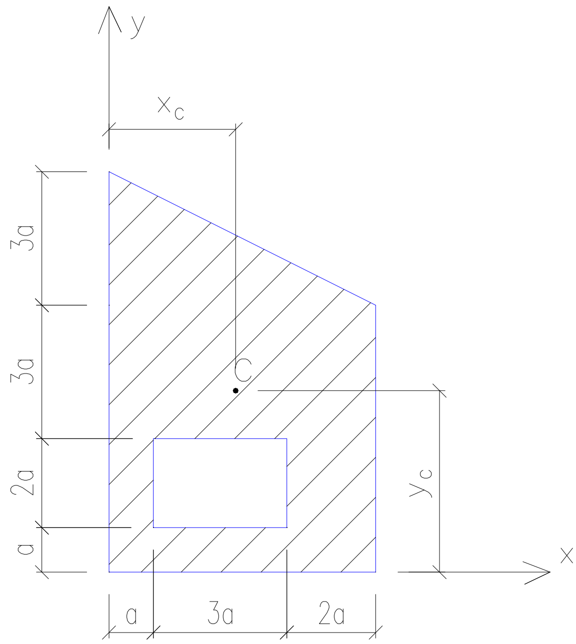
$$A = 6a\,6a + \frac{1}{2}6a\,3a + \left(-3a\,2a\right) = 36a^2 + 9a^2 - 6a^2 = 39a^2$$

Współrzędne środka ciężkości całej figury w przyjętych osiach (x, y) wynoszą zatem odpowiednio:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{111a^3}{39a^2} = \frac{111}{39}a \cong 2.85a$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{159a^3}{39a^2} = \frac{159}{39}a \cong 4.08a$$

Obliczone wartości współrzędnych środka ciężkości znajdujemy na rysunku w układzie osi (x, y) uzyskując środek ciężkości – C (patrz rysunek 3). Położenie środka ciężkości figury nie zależy od przyjętego wstępnie układu osi, ani sposobu podziału na figury składowe.



Rysunek 3