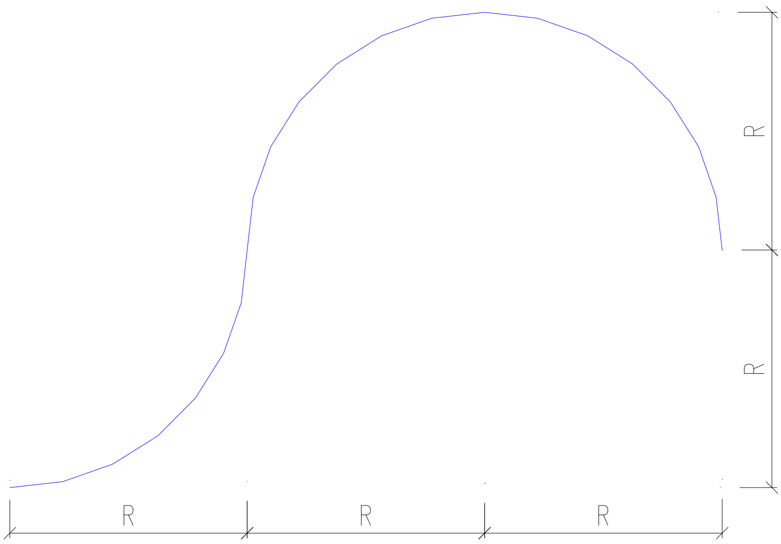
Przykład 6.3 Środek ciężkości krzywej

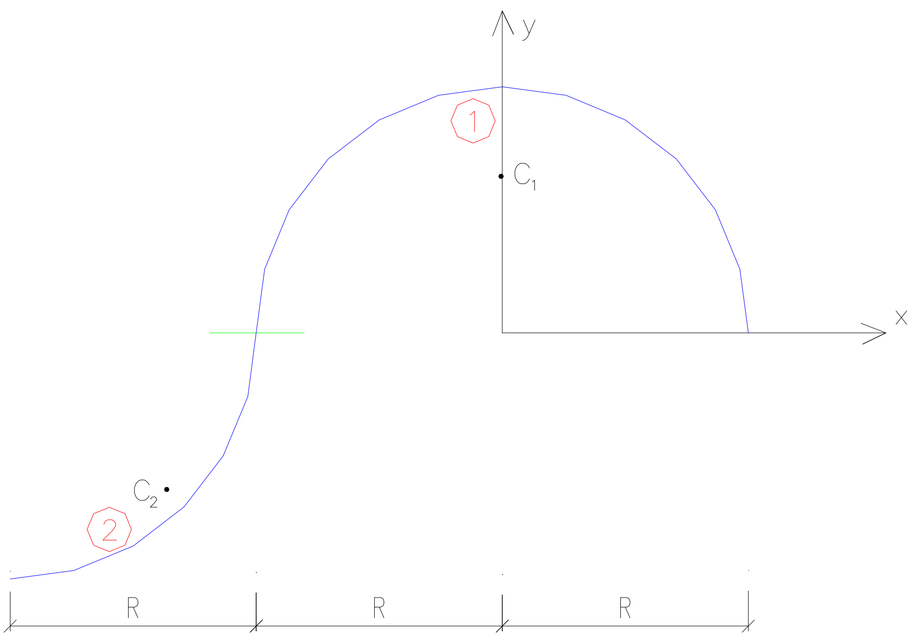
Znaleźć środek ciężkości krzywej przedstawionej na poniższym rysunku.



Rysunek 1

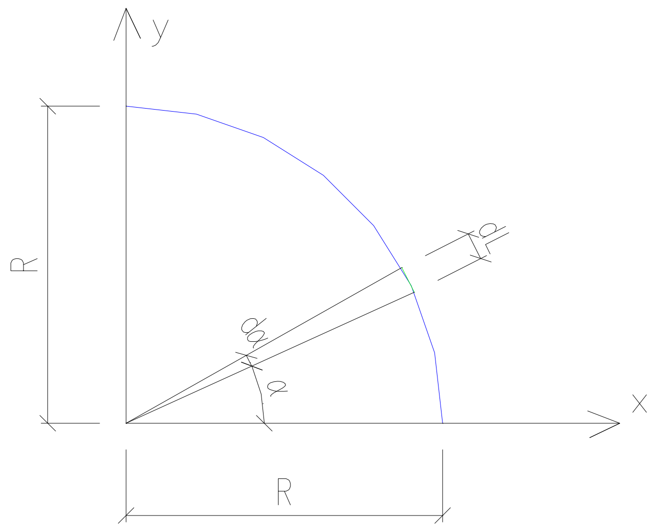
Środek ciężkości krzywej można obliczać na podstawie wzorów i zasad podobnych do obowiązujących przy obliczeniach środka ciężkości figur płaskich. Jedyną zmianą jest zastąpienie odpowiednio na wszystkich miejscach we wzorach (1), (2), (3) przestawionych w zadaniu 6.1, pola powierzchni figur A – długością krzywych L.
Przykładowo wzory na statyczne momenty bezwładności po zmianie wyglądają następująco:

$$S_x^L = \sum_{i=1}^{n} L_i \, y_{C_i} \ , \quad S_y^L = \sum_{i=1}^{n} L_i \, x_{C_i} \qquad (1)$$



Rysunek 2

Wyznaczając środek ciężkości krzywej przedstawionej na rysunku 1 podzielono ją na górną połowę i dolną ćwiartkę okręgu oraz przyjęto w celu uproszczenia obliczeń układ osi w środku połowy okręgu (patrz rysunek 2).
Środek ciężkości połowy okręgu C_1 leży na jej osi symetrii, jej współrzędna pionowa y_{C1} jest taka sama jak dla ćwiartki.
W celu poznania tej współrzędnej policzymy położenie środka ciężkości ćwiartki okręgu usytuowanej jak na rysunku 3. Obie krzywe będą miały tę samą współrzędną pionową środka ciężkości.



Rysunek 3

Równanie na statyczny moment bezwładności dla krzywej wynosi:

$$S_y^L = \int_L x \, dL$$

W celu policzenia występującej w powyższym wzorze całki wprowadzimy współrzędną biegunową α przedstawioną na rysunku 3. Wyrażenia stojące pod całką mają następujące wzory:

$$x = R\cos\alpha$$

$$dL = R\,d\alpha$$

Po podstawieniu ich do całki, statyczny moment bezwładności S_y^L wynosi:

$$S_y^L = \int_L x \, dL = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos\alpha \quad Rd\alpha = R^2 \sin\alpha\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2$$

Długość ćwiartki okręgu policzymy wykorzystując wzór na długość całego okręgu:

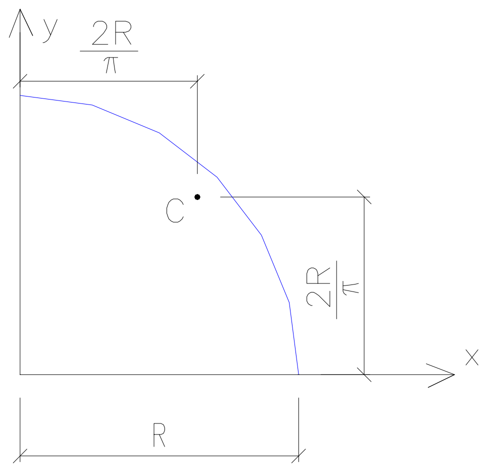
$$L = \frac{1}{4} 2\pi R = \frac{\pi R}{2}$$

Środek ciężkości ćwiartki okręgu ma zatem współrzędne:

$$x_C = \frac{S_y^L}{L} = \frac{R^2}{\frac{\pi R}{2}} = \frac{2R}{\pi} \cong 0.64R$$

$$y_C = x_C = \frac{2R}{\pi} \cong 0.64R$$

Odmierzając w układzie osi powyższe wartości znajdujemy środek ciężkości krzywej.



Rysunek 4

Znamy już zatem położenie środka ciężkości ćwiartki okręgu oraz szukaną współrzędną środka ciężkości półokręgu:

$$y_{C1} = \frac{2R}{\pi}$$

Dla krzywej z rysunku 2 momenty statyczne bezwładności zgodnie z wzorami (1) tego zadania wynoszą :

$$S_x^L = \frac{1}{2} 2\pi R \frac{2R}{\pi} + \frac{1}{4} 2\pi R \left(-\frac{2R}{\pi} \right) = R^2$$

$$S_y^L = \frac{1}{2} 2\pi R \; 0 + \frac{1}{4} 2\pi R \left[-\left(2R - \frac{2R}{\pi} \right) \right] = -(\pi - 1) R^2$$

Długość całej krzywej L wynosi:

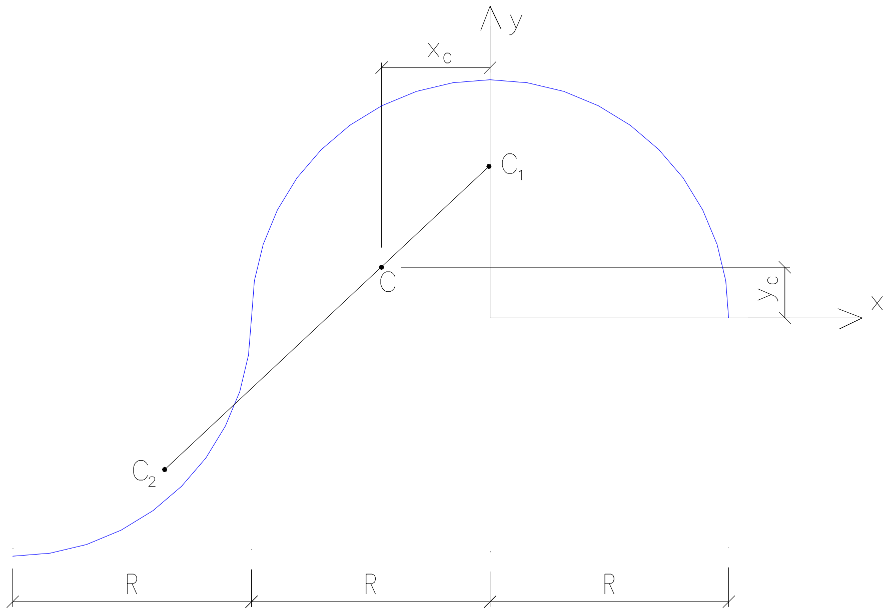
$$L = \frac{3}{4} 2\pi R = \frac{3\pi R}{2}$$

Położenie środka ciężkości krzywej określamy podobnie jak dla figur płaskich:

$$x_C = \frac{S_y^L}{L} = \frac{-(\pi - 1)R^2}{\frac{3\pi R}{2}} = \frac{2(1-\pi)}{3\pi} R \cong -0.45R$$

$$y_C = \frac{S_x^L}{L} = \frac{R^2}{\frac{3\pi R}{2}} = \frac{2}{3\pi} R \cong 0.21R$$

Wyznaczając położenie środka ciężkości na rysunku otrzymujemy:



Rysunek 5

Środek ciężkości krzywej złożonej z dwóch składowych krzywych leży zawsze na odcinku łączącym środki ciężkości tych krzywych (patrz rysunek 5). Podobna zasada obowiązuje również dla figur i brył.