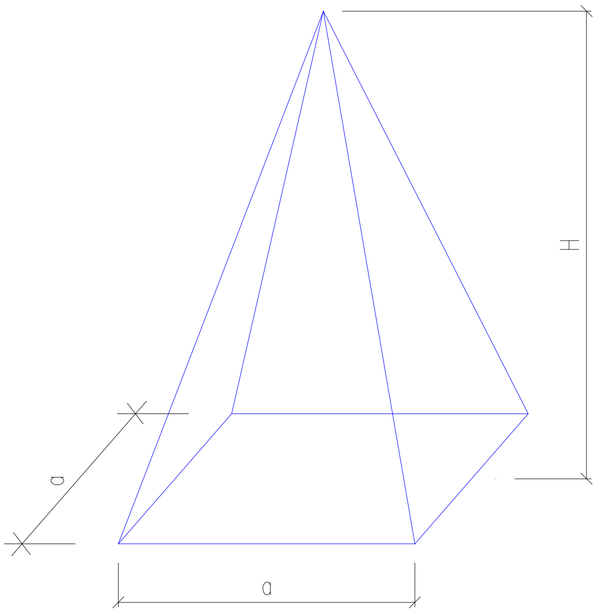
Przykład 6.4 Środek ciężkości bryły

Znaleźć środek ciężkości ostrosłupa foremnego o podstawie kwadratu o wymiarach jak na rysunku poniżej.



Rysunek 1

Środek ciężkości bryły można obliczać poprawiając wzory (1), (2), (3) z zadania 6.1. Poniżej przestawiono wzory do obliczeń środka ciężkości po uwzględnieniu trzeciej współrzędnej oraz zamieniając pole figury A, na objętość bryły V.

Położenie środka ciężkości bryły określa się na podstawie wzorów:

$$x_c = \frac{S_{yz}}{V}, \quad y_c = \frac{S_{xz}}{V}, \quad z_c = \frac{S_{xy}}{V}, \tag{1}$$

gdzie statyczne momenty bezwładności i pole określone są wzorami:

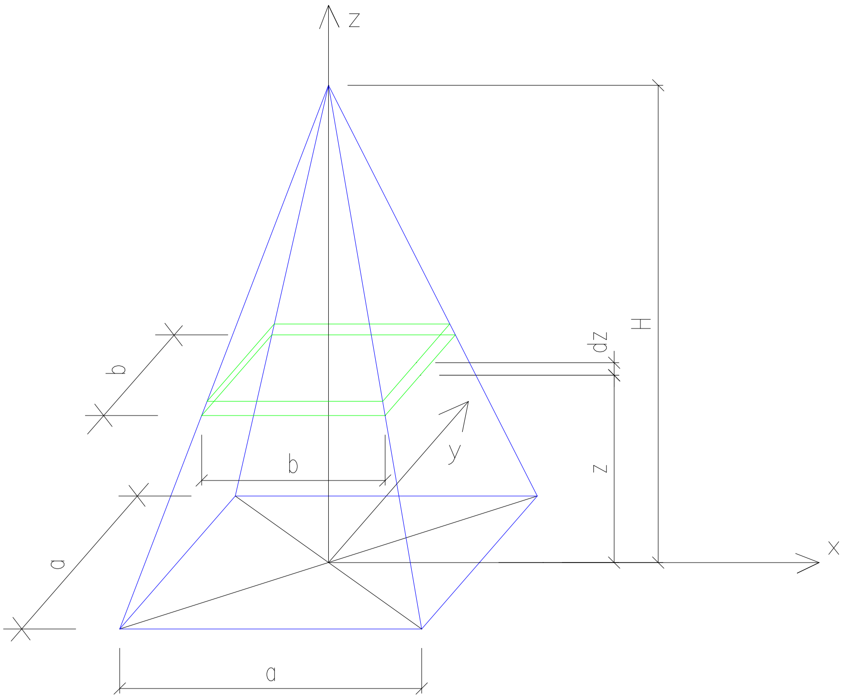
$$S_{yz} = \int_V x\,dV \;, \quad S_{xz} = \int_V y\,dV \;, \quad S_{xy} = \int_V z\,dV \;, \quad V = \int_V dV \,. \tag{2}$$

Dla bryły składającej się z brył, dla których znane jest położenie środków ciężkości statyczne momenty bezwładności można określać na podstawie wzorów:

$$S_{yz} = \sum_{i=1}^{n} V_i\, x_{C_i} \;, \quad S_{xz} = \sum_{i=1}^{n} V_i\, y_{C_i} \;, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} V_i\, z_{C_i} \tag{3}$$

gdzie V_i, x_{Ci}, y_{Ci} oraz z_{Ci} oznaczają objętość i odpowiednią współrzędną środka ciężkości i-tej bryły składowej w przyjętym układzie osi.

Dla bryły z rysunku 1 środek ciężkości leżeć będzie na osi pionowej ostrosłupa. W przypadku usytuowania układu osi współrzędnych tak, aby oś z układu pokrywała się z osią symetrii bryły znaleźć wystarczy tylko współrzędną pionową środka ciężkości z_c. Przyrost objętości dV określimy jako objętość prostopadłościanu położonego na wysokości z, o wysokości dz i podstawie kwadratu o boku b. Powyższe założenia przedstawiono na rysunku 2.



Rysunek 2

Wielkość b policzymy z twierdzenia Talesa w stosunku do boku podstawy a.

$$\frac{a}{H} = \frac{b}{(H-z)}$$

$$b = \frac{a}{H}(H-z)$$

Przyrost objętości dV wynosi:

$$dV = b^2 dz = \left[\frac{a}{H}(H-z)\right]^2 dz$$

Moment statyczny do policzenia z_c ma zatem wartość:

$$S = \int_V z\, dV = \int_0^H z\left[\frac{a}{H}(H-z)\right]^2 dz = \int_0^H \frac{a^2}{H^2}\left(H^2 z - 2Hz^2 + z^3\right)dz = \frac{a^2}{H^2}\left(\frac{H^2 z^2}{2} - \frac{2Hz^3}{3} + \frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_0^H =$$

$$= \frac{1}{12}a^2 H^2$$

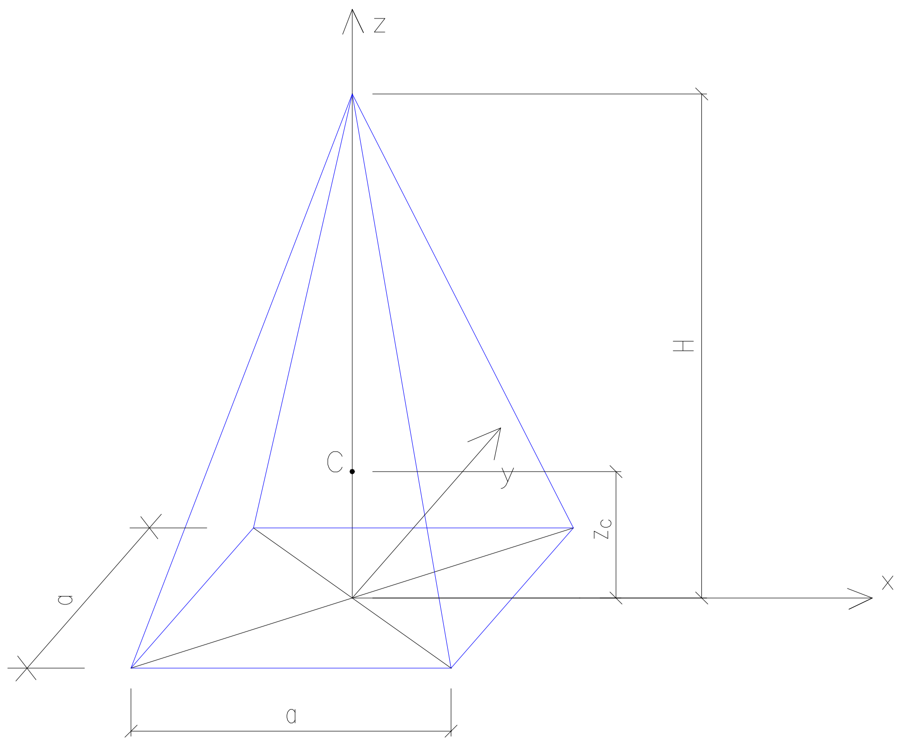
Objętość ostrosłupa policzymy także za pomocą całki:

$$V = \int_V dV = \int_0^H \left[\frac{a}{H}(H-z)\right]^2 dz = \int_0^H \frac{a^2}{H^2}\left(H^2 - 2Hz + z^2\right)dz = \frac{a^2}{H^2}\left(H^2 z - Hz^2 + \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^H = \frac{1}{3}a^2 H$$

Współrzędna pionowa środka ciężkości ostrosłupa wynosi zatem:

$$z_c = \frac{\frac{1}{12}a^2H^2}{\frac{1}{3}a^2H} = \frac{1}{4}H$$

Policzoną współrzędną znajdujemy w układzie współrzędnych.



Rysunek 3