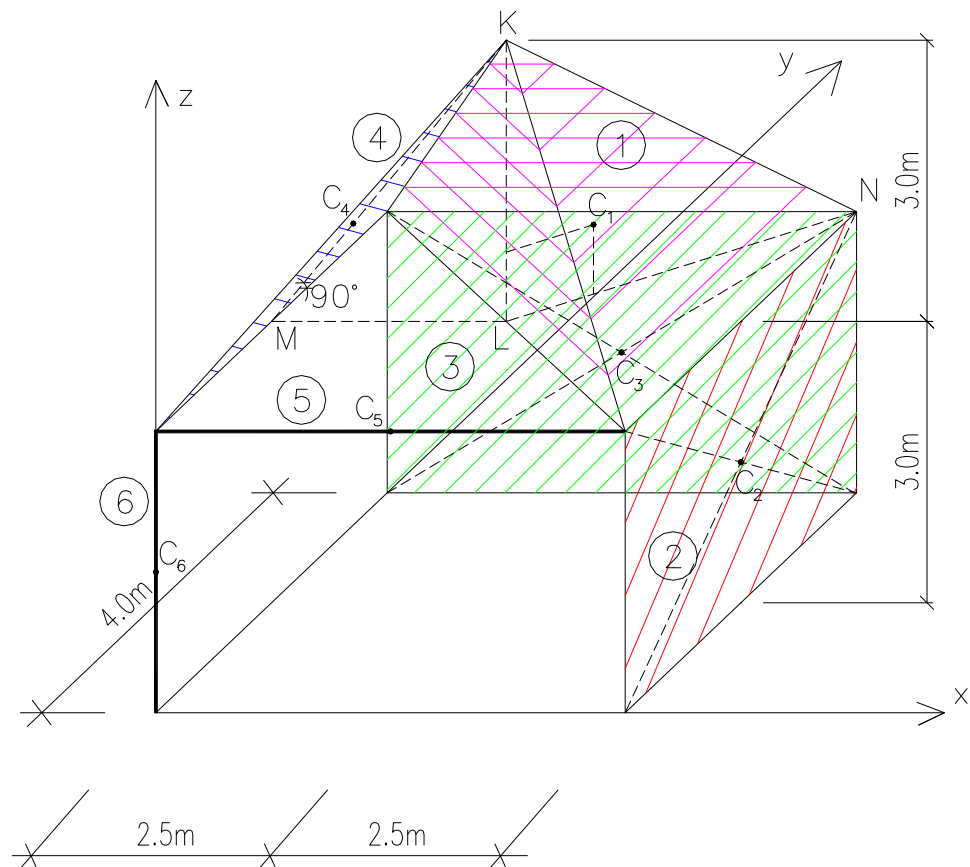


## Przykład 6.5 Środek ciężkości układu obiektów

Znaleźć środek ciężkości układu obiektów przedstawionego na rysunku 1: nr1 - ostrosłupa foremnego o podstawie trójkąta i ciężarze właściwym  $3.0 \text{ kg/m}^3$ , nr2 – pionowej tarczy w kształcie prostokąta o ciężarze powierzchniowym  $3.5 \text{ kg/m}^2$ , nr3 – pionowej tarczy w kształcie prostokąta o ciężarze powierzchniowym  $2.0 \text{ kg/m}^2$ , nr4 – ukośnie ułożonej tarczy w kształcie trójkąta o ciężarze powierzchniowym  $4.0 \text{ kg/m}^2$ , nr5 – pręta o ciężarze  $5 \text{ kg/m}$ , nr6 – pręta o ciężarze  $8 \text{ kg/m}$ . Kolejne obiekty zaznaczono kolorami, wymiary i pręty nr5 i nr6 oraz przyjęte osie układu współrzędnych kolorem czarnym, linie pomocnicze są przerywane. Na rysunku zaznaczono środki ciężkości wszystkich obiektów. Jednostką układu współrzędnych jest 1.0 metr.



Rysunek 1

Dla układu składającej się z obiektów, dla których znane jest położenie środków ciężkości statyczne momenty bezwładności można określać na podstawie wzorów:

$$S_{yz} = \sum_{i=1}^n Q_i x_{C_i}, \quad S_{xz} = \sum_{i=1}^n Q_i y_{C_i}, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n Q_i z_{C_i} \quad (1)$$

gdzie  $Q_i$ ,  $x_{C_i}$ ,  $y_{C_i}$  oraz  $z_{C_i}$  oznaczają ciężar i odpowiednią współrzędną środka ciężkości i-tego obiektu składowego w przyjętym układzie osi.

Położenie środka ciężkości układu określa się na podstawie wzorów:

$$x_c = \frac{S_{yz}}{Q}, \quad y_c = \frac{S_{xz}}{Q}, \quad z_c = \frac{S_{xy}}{Q}, \quad (2)$$

Gdzie  $Q$  oznacza łączny ciężar wszystkich obiektów.

Obliczamy najpierw kolejno ciężary poszczególnych obiektów, mnożąc ich ciężary właściwe przez odpowiednio objętość bryły, powierzchnię figury i długość krzywej. Za wyjątkiem wielkości wysokości tarczy nr4 wszystkie wymiary obiektów można odczytać bezpośrednio z rysunku. Wysokość trójkąta tarczy nr4 można obliczyć z trójkąta prostokątnego o wierzchołkach  $K$ ,  $L$ , i  $M$ :

$$h_4 = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot 5\right)^2 + 3^2} m = \sqrt{15.25} m \cong 3.91 m$$

Ciężary kolejnych obiektów wynoszą odpowiednio:

$$Q_1 = \frac{1}{3} \frac{1}{2} 5 m 4 m 3 m 3 \frac{kg}{m^3} = 30 kg$$

$$Q_2 = 4 m 3 m 3.5 \frac{kg}{m^3} = 42 kg$$

$$Q_3 = 5 m 3 m 2 \frac{kg}{m^3} = 30 kg$$

$$Q_4 = \frac{1}{2} 4 m 3.91 m 4 \frac{kg}{m^3} = 31.28 kg$$

$$Q_5 = 5 m 5 \frac{kg}{m^3} = 25 kg$$

$$Q_6 = 3 m 8 \frac{kg}{m^3} = 24 kg$$

Określmy teraz położenie środków ciężkości kolejnych obiektów w przyjętym układzie współrzędnych. Środek ciężkości ostrosłupa nr1 oddalony jest od jego poziomej podstawy o jedną czwartą wysokości – odcinka  $KL$  oraz od bocznej pionowej podstawy o jedną czwartą wysokości – odcinka  $LN$ . Współrzędne te wynoszą zatem:

$$x_{C1} = \left(2.5 + \frac{1}{4} \cdot 2.5\right) m = 3.125 m$$

$$y_{C1} = \left(2 + \frac{1}{4} \cdot 2\right) m = 2.5 m$$

$$z_{C1} = \left(3 + \frac{1}{4} \cdot 3\right) m = 3.75 m$$

Środek ciężkości trójkątnej równoramiennej tarczy nr4 leży na odcinku  $KM$  i jest oddalony od boku podstawy o jedną trzecią wysokości  $h_4$ . Współrzędne środka ciężkości tarczy wynoszą:

$$x_{C4} = \frac{1}{3} \cdot 2.5 m = 0.833 m$$

$$y_{C4} = 2 m$$

$$z_{C4} = \left(3 + \frac{1}{3} \cdot 3\right) m = 4 m$$

Położenie środków ciężkości pozostałych obiektów jest łatwe do odczytania z wymiarów układu.

Dane dotyczące poszczególnych obiektów oraz obliczenia statycznych momentów bezwładności można w łatwy sposób przedstawić tabelarycznie.

Numer obiektu	Ciężar obiektu – $Q_i$ [kg]	Współrzędne środków ciężkości obiektów			Statyczne momenty bezwładności obiektów		
		$x_{Ci}$ [m]	$y_{Ci}$ [m]	$z_{Ci}$ [m]	$Q_i x_{Ci}$ [kgm]	$Q_i y_{Ci}$ [kgm]	$Q_i z_{Ci}$ [kgm]
1	30	3.125	2.5	3.75	93.75	75	112.5
2	42	5	2	1.5	210	84	63
3	30	2.5	4	1.5	75	120	45
4	31.28	0.833	2	4	26.06	62.56	125.12
5	25	2.5	0	3	62.5	0	75
6	24	0	0	1.5	0	0	36
Suma	182.28				467.31	341.56	456.62

W ostatniej grupie kolumn policzono iloczyny ciężaru obiektów i kolejnych współrzędnych ich środków ciężkości. W ostatnim wierszu tabeli przedstawiono sumę wyrazów z poszczególnych kolumn - ciężaru obiektów i ich statycznych momentów bezwładności. Statyczne momenty bezwładności względem kolejnych płaszczyzn wynoszą zatem odpowiednio:

$$S_{yz} = 467.31 \text{ kgm}$$

$$S_{xz} = 341.56 \text{ kgm}$$

$$S_{xy} = 456.62 \text{ kgm}$$

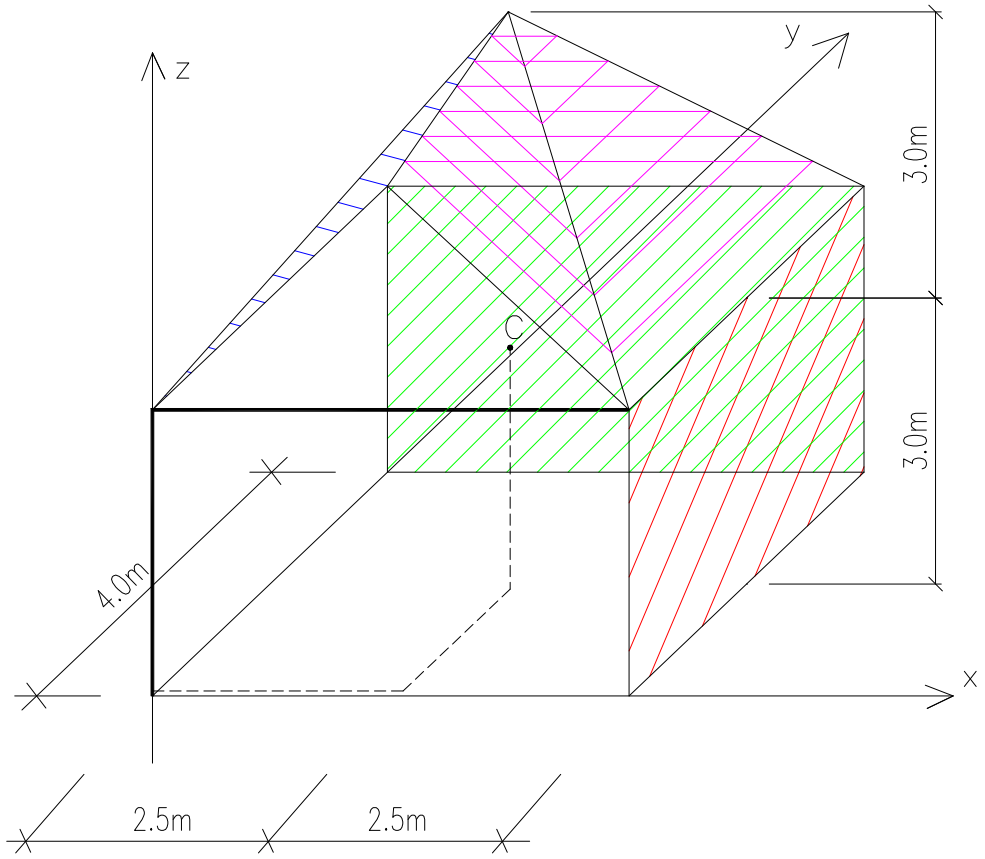
Obliczając współrzędne środka ciężkości otrzymujemy:

$$x_c = \frac{S_{yz}}{Q} = \frac{467.31 \text{ kgm}}{182.28 \text{ kg}} \cong 2.56 \text{ m}$$

$$y_c = \frac{S_{xz}}{Q} \cong \frac{341.56 \text{ kgm}}{182.28 \text{ kg}} \cong 1.87 \text{ m}$$

$$z_c = \frac{S_{xy}}{Q} \cong \frac{456.62 \text{ kgm}}{182.28 \text{ kg}} \cong 2.51 \text{ m}$$

Na rysunku 2 przedstawiono przerywanymi liniami odmierzenie kolejnych współrzędnych środka ciężkości układu obiektów z rysunku 1.



Rysunek 2