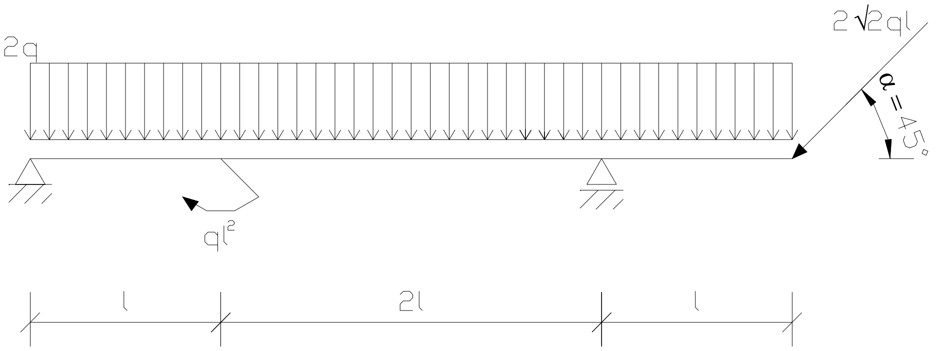
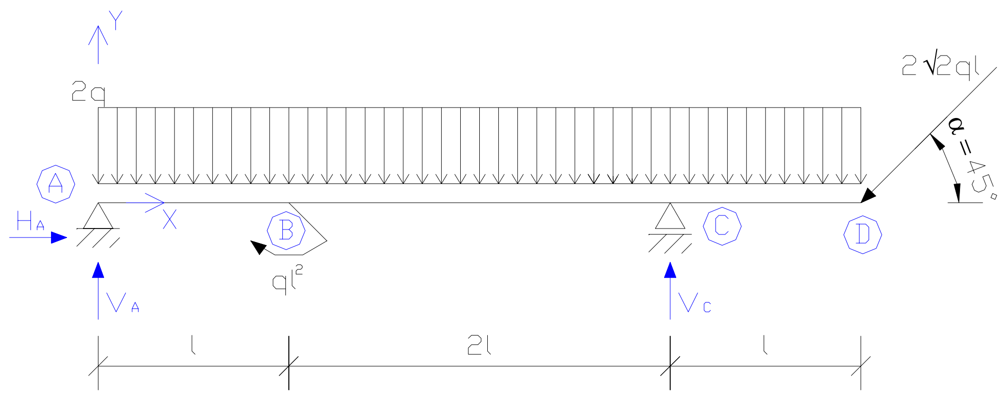
## Przykład 7.1. Belka jednoprzęsłowa ze wspornikiem

Dla poniższej belki zapisać funkcje sił przekrojowych i sporządzić ich wykresy.




### Rozwiązanie

Rozwiązywanie zadania rozpocząć należy od oznaczenia punktów charakterystycznych, składowych reakcji i przyjęcia układu współrzędnych. Punkty charakterystyczne są to miejsca przyłożenia obciążeń skupionych (zewnętrznych, bądź reakcji podpór), miejsca początkowe i końcowe obciążeń rozłożonych oraz krańce belek. W badanym przypadku występują 4 punkty charakterystyczne.




W celu obliczenia reakcji wykorzystamy trzy równania równowagi, przy pisaniu których przyjmujemy następujące założenia:

- siły piszemy ze znakiem „+" jeśli działają w kierunku zgodnym z osiami X, lub Y i ze znakiem „-" jeśli działają w kierunku przeciwnym;
- momenty piszemy ze znakiem „+" jeśli powodują obrót wokół rozpatrywanego punktu (zaznaczonego w indeksie dolnym) w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, a ze znakiem „-" jeśli w kierunku przeciwnym.

$$\sum P_x = 0 \Leftrightarrow H_A - 2\sqrt{2}ql \cdot \cos\alpha = 0 \Rightarrow H_A = 2\sqrt{2}ql \cdot \cos 45^o \Rightarrow H_A = 2\sqrt{2}ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{H_A = 2ql}$$

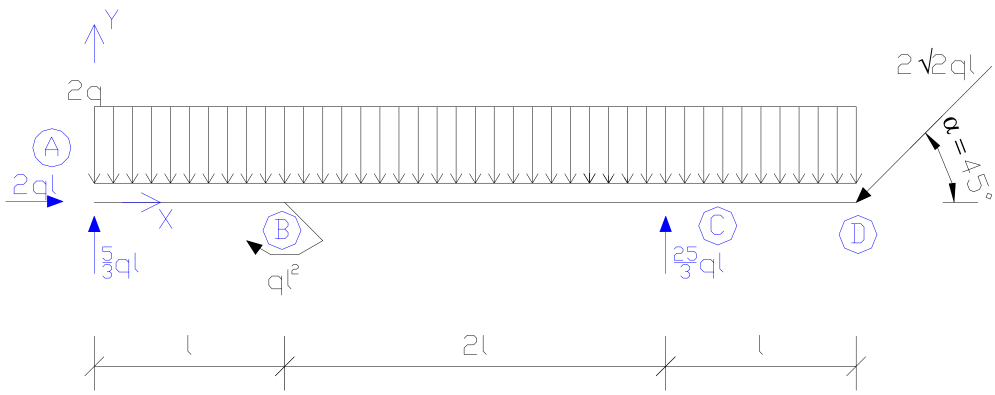
$$\sum M_A = 0 \Leftrightarrow 2q \cdot 4l \cdot \frac{1}{2} \cdot 4l + ql^2 - V_C \cdot 3l + 2\sqrt{2}ql \cdot \sin\alpha \cdot 4l = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3V_C = 16ql + ql + 8\sqrt{2}ql \cdot \sin 45^o \Rightarrow 3V_C = 17ql + 8\sqrt{2}ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3V_C = 25ql \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{V_C = \frac{25}{3}ql}$$

$$\sum P_y = 0 \Leftrightarrow V_A - 2q \cdot 4l + V_C - 2\sqrt{2}ql \cdot \sin\alpha = 0 \Rightarrow V_A = 8ql - \frac{25}{3}ql + 2\sqrt{2}ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{V_A = \frac{5}{3}ql}$$

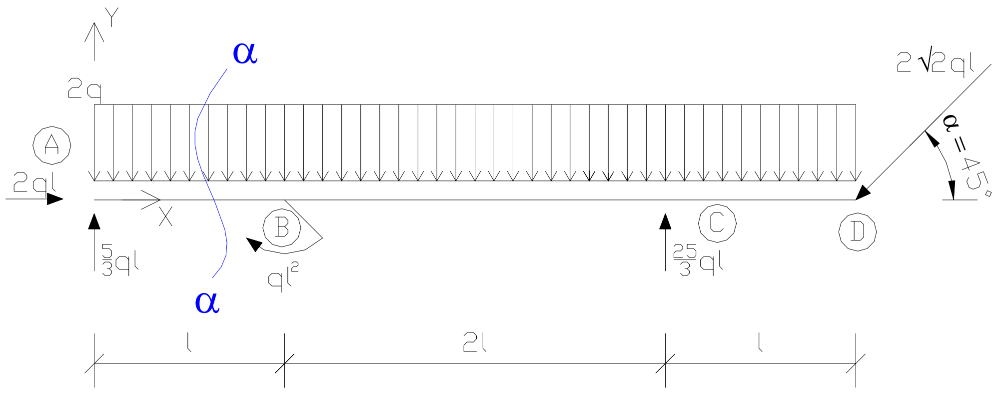
Stąd na belkę działają następujące obciążenia:



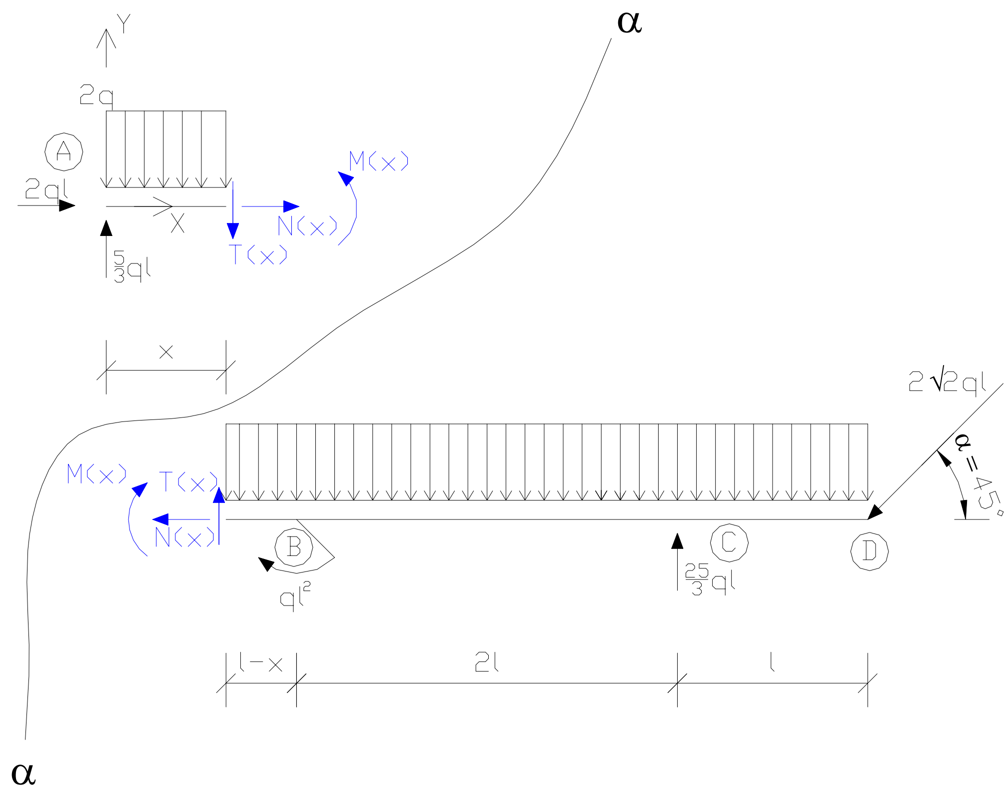

Obecnie możemy już przystąpić do obliczania funkcji sił przekrojowych.

W celu znalezienia funkcji sił przekrojowych należy dokonać „przecięcia" belki pomiędzy punktami charakterystycznymi. W badanym przypadku będą to trzy przekroje: pomiędzy A i B, B i C oraz C i D. Po dokonaniu „przecięcia" belki analizujemy „odcięty" fragment z lewej, lub prawej strony „cięcia" wraz z uzewnętrznionymi siłami przekrojowymi w miejscu „przecięcia". Wybór fragmentu belki do analizy równowagi nie ma wpływu na wyniki obliczeń, ma natomiast wpływ na ich prostotę. Należy więc wybrać ten fragment belki, dla którego obliczenia są prostsze.

W celu znalezienia funkcji sił przekrojowych na odcinku A-B „przetnijmy" belkę pomiędzy tymi punktami przekrojem α-α.




W miejscu „cięcia" uzewnętrzniamy siły przekrojowe, pamiętając, aby wybrać taki zwrot siły normalnej *N(x)*, aby rozciągała ona rozpatrywany fragment belki (a więc siła *N(x)* musi mieć zawsze kierunek „od belki"); kierunek siły poprzecznej *T(x)* dobieramy w taki sposób, aby powodowała obrót badanej części belki zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara; kierunek działania momentu *M(x)* zwyczajowo przyjmuje się tak, aby rozciągane były dolne włókna belki.




W celu znalezienia równań funkcji *N(x)*, *T(x)* i *M(x)* rozpatrujemy równania równowagi $\sum P_x = 0, \sum P_y = 0, \sum M_{\alpha-\alpha} = 0$ dla wybranego fragmentu belki. Na pierwszy rzut oka widać, że obliczenia będą łatwiejsze, gdy rozpatrywać będziemy lewą część belki.

W tym przypadku równania równowagi mają postać:

$$\sum P_x = 0 \Leftrightarrow N(x) + 2ql = 0 \Rightarrow N(x) = -2ql$$

$$\sum P_y = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3}ql - 2q \cdot x - T(x) = 0 \Rightarrow T(x) = \frac{5}{3}ql - 2qx$$

$$\sum M_{\alpha-\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3}ql \cdot x - 2q \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot x - M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = \frac{5}{3}qlx - qx^2$$

Widać, że na odcinku A-B, tj. dla $x \in \langle 0,l \rangle$ funkcja *N(x)* jest stała, *T(x)* zmienia się liniowo, a *M(x)* parabolicznie. Oznacza to, że aby narysować wykres funkcji *T(x)* na tym odcinku wystarczy nam znajomość wartości funkcji w dwóch punktach pomiędzy A i B, w przypadku funkcji *M(x)* potrzebne są wartości w trzech punktach.

$$T_A = T(0) = \frac{5}{3}ql - 2q \cdot 0 = \frac{5}{3}ql$$

$$T_B^l = T(l) = \frac{5}{3}ql - 2ql = -\frac{1}{3}ql$$

$$M_A = M(0) = \frac{5}{3}ql \cdot 0 - q \cdot 0^2 = 0$$

$$M_B^l = M(l) = \frac{5}{3}ql \cdot l - ql^2 = \frac{2}{3}ql^2$$

Ponieważ pomiędzy siłą tnącą, a momentem zginającym istnieje zależność

$$\frac{dM(x)}{dx} \equiv T(x),$$

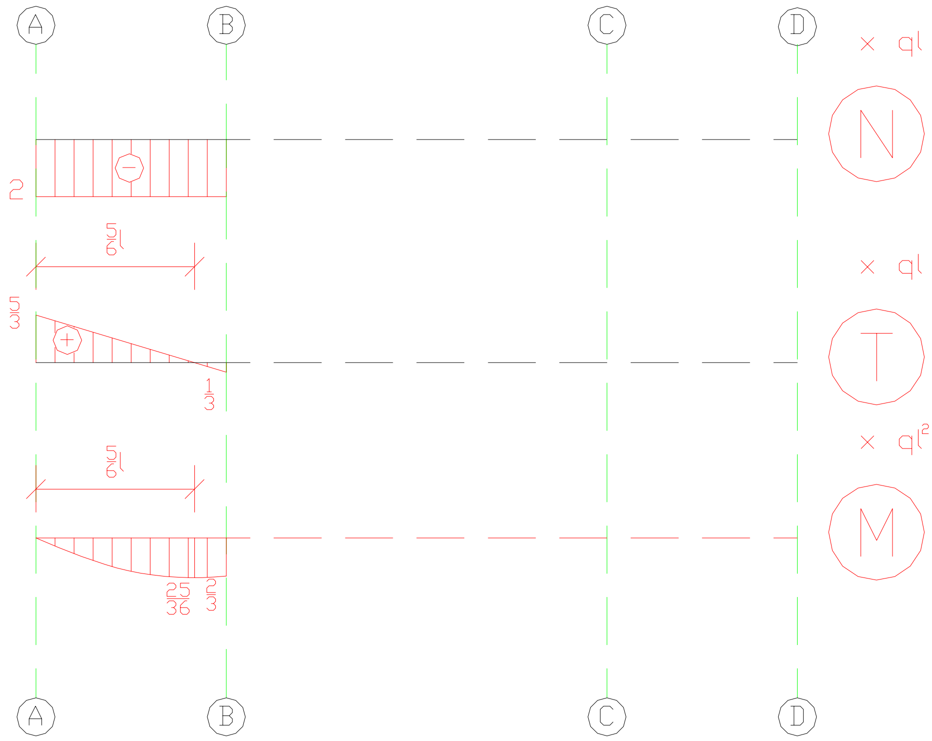
więc ekstremum momentu występuje w punkcie zmiany znaku siły poprzecznej. Jak widać punkt taki znajduje się pomiędzy A i B, gdyż siła *T(x)* zmienia się z wartości dodatniej na ujemną. Miejsce zmiany znaku jest o *x* odległe od A

$$T(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3}ql - 2q \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}l$$

W punkcie tym ekstremum lokalne momentu ma wartość:

$$M_{ekstr.} = M\left(\frac{5}{6}l\right) = \frac{5}{3}ql \cdot \frac{5}{6}l - q\left(\frac{5}{6}l\right)^2 = \left(\frac{25}{18} - \frac{25}{36}\right)ql^2 = \frac{50-25}{36}ql^2 = \frac{25}{36}ql^2$$

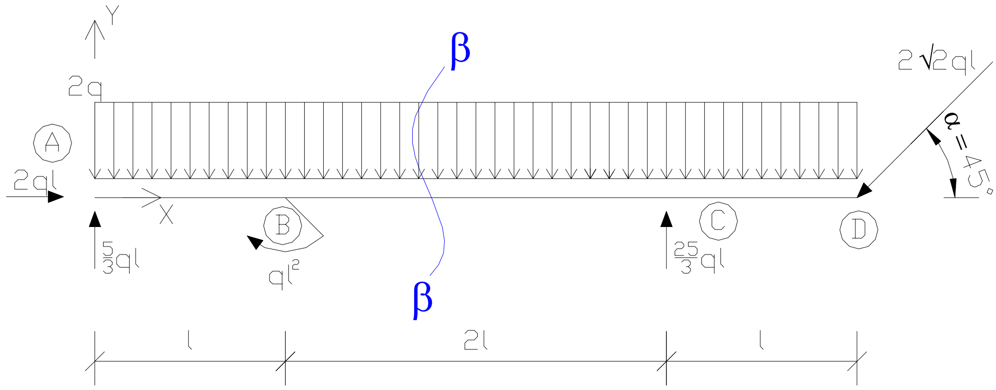
Tak więc możemy narysować wykresy w przedziale A-B:



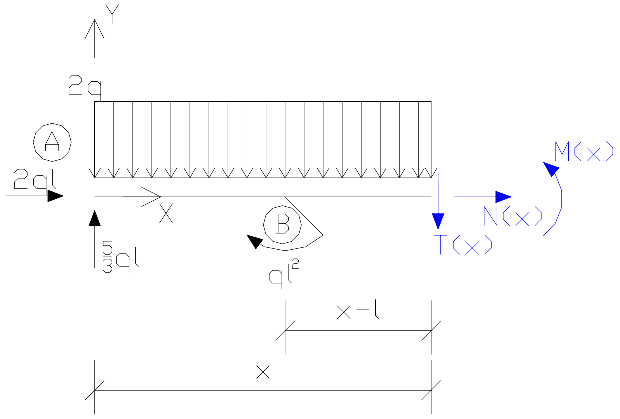

Należy pamiętać, aby na wykresach *N* i *T* umieszczać znak „+” lub „-”. Na wykresie *M* znaków tych nie umieszczamy, rysujemy natomiast wykres zawsze po stronie włókien rozciąganych. W badanym przedziale moment *M(x)* jest większy od zera, czyli rozciąga włókna dolne, tak więc narysowaliśmy go pod osią.

Analogicznie postępując znajdziemy równania funkcji sił przekrojowych w pozostałych przedziałach.

„Przetnijmy” rozpatrywaną belkę pomiędzy punktami B i C przekrojem $\beta - \beta$.



Rozpatrywać będziemy lewą część belki.




Równania równowagi mają postać:

$$\sum P_x = 0 \Leftrightarrow N(x) + 2ql = 0 \Rightarrow N(x) = -2ql$$

$$\sum P_y = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3}ql - 2q \cdot x - T(x) = 0 \Rightarrow T(x) = \frac{5}{3}ql - 2qx$$

$$\sum M_{\beta-\beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3}ql \cdot x - 2q \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot x + ql^2 - M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = \frac{5}{3}qlx - qx^2 + ql^2$$

Oczywiście powyższe wzory obowiązują dla $x \in \langle l,3l \rangle$. Również w tym przedziale funkcja *N(x)* jest stała, *T(x)* jest zmienna liniowo (czyli potrzebujemy wartości w dwóch punktach), a *M(x)* jest zmienna parabolicznie (potrzebujemy wartości w trzech punktach). Obliczmy wartości funkcji *T(x)* i *M(x)* na krańcach przedziału:

$$T_B^p = T(l) = \frac{5}{3}ql - 2q \cdot l = -\frac{1}{3}ql$$

$$T_C^l = T(3l) = \frac{5}{3}ql - 2q \cdot 3l = -\frac{13}{3}ql$$

$$M_B^p = M(l) = \frac{5}{3}ql \cdot l - q \cdot l^2 + ql^2 = \frac{5}{3}ql^2$$

$$M_C^l = M(3l) = \frac{5}{3}ql \cdot 3l - q \cdot (3l)^2 + ql^2 = 5ql^2 - 9ql^2 + ql^2 = -3ql^2$$

Jak widać pomiędzy punktami B i C funkcja *T(x)* nie zmienia znaku, czyli nie występuje ekstremum lokalne funkcji *M(x)*. Można również zauważyć, że z kolei funkcja *M(x)* zmienia znak (minus oznacza, że rozciągane są włókna górne). Wynika z tego, że istnieje punkt pomiędzy B i C, w którym *M(x)=0*. Współrzędne tego punktu znajdziemy z równania:

$$M(x_0)=0 \Leftrightarrow \frac{5}{3}qlx_0 - q(x_0)^2 + ql^2 = 0 \Leftrightarrow x_0{}^2 - \frac{5}{3}lx - l^2 = 0$$

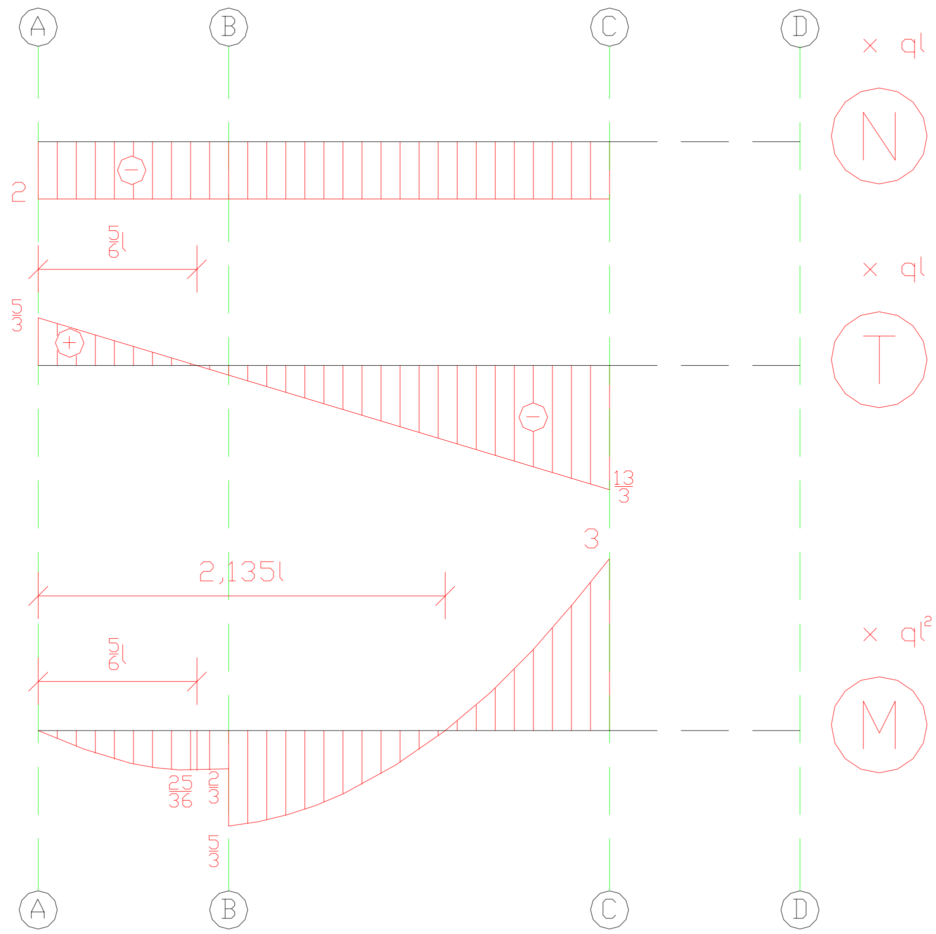
$$\Delta = \left(-\frac{5}{3}l\right)^2 - 4\cdot\left(-l^2\right) = \frac{25}{9}l^2 + 4l^2 = \frac{25+36}{9}l^2 = \frac{61}{9}l^2$$

$$\sqrt{\Delta} = \frac{\sqrt{61}}{3}l \approx 7{,}81l$$

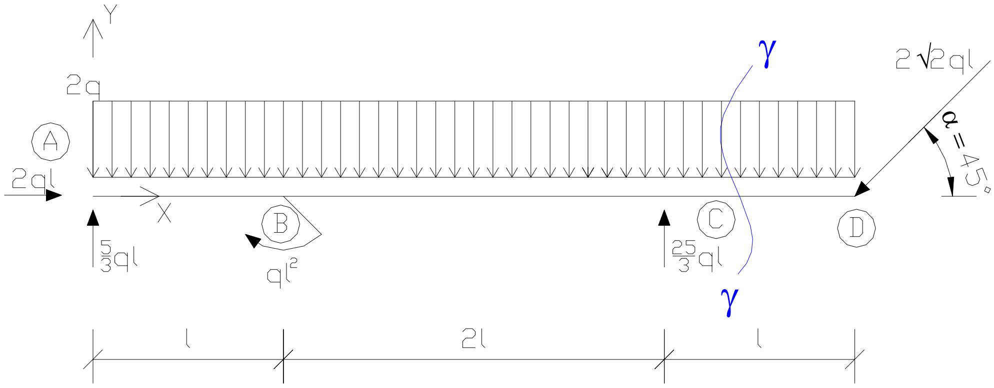
$$x_{0_1} = \frac{\frac{5}{3}l - \frac{\sqrt{61}}{3}l}{2} = \frac{5-\sqrt{61}}{6}l \approx 0{,}468l$$

$$x_{0_2} = \frac{\frac{5}{3}l + \frac{\sqrt{61}}{3}l}{2} = \frac{5+\sqrt{61}}{6}l \approx 2{,}135l$$

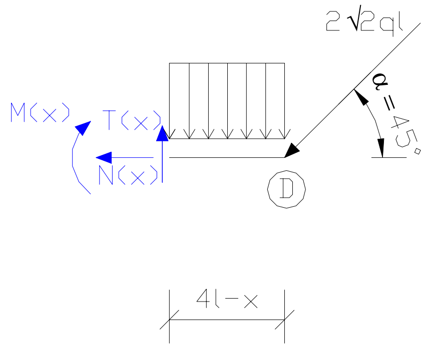
Oczywiście $x_{0_1}$ nie zawiera się w rozpatrywanym przedziale, tak więc trzecim punktem, który ułatwi nam narysowanie wykresu M(x) jest $x_0 = x_{0_2}$.



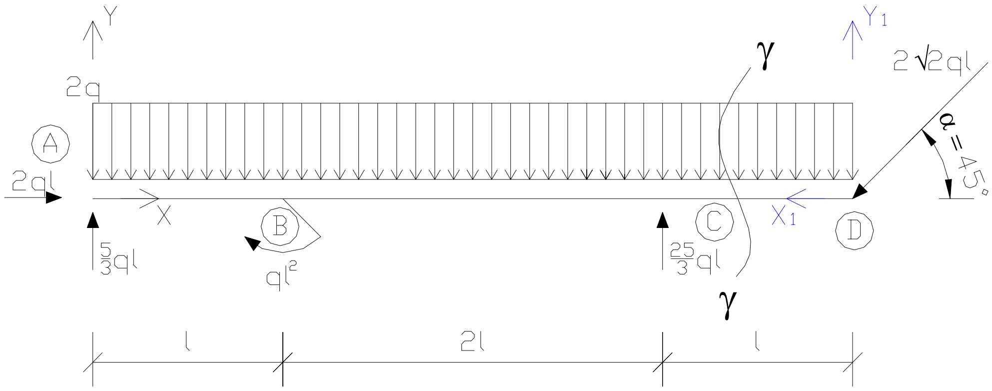
W celu znalezienia funkcji sił przekrojowych na odcinku C-D „przetnijmy” belkę pomiędzy tymi punktami przekrojem γ-γ.



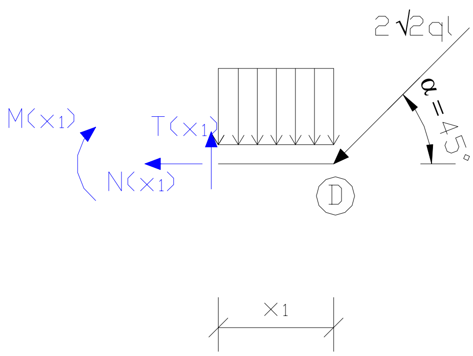

Jako wymagającą mniejszej pracy rachunkowej rozpatrywać będziemy prawą część belki.




Nakład obliczeń można zredukować przyjmując nowy układ współrzędnych $X_1Y_1$ o środku w punkcie D.




Wówczas odcięta przekrojem γ-γ prawa część belki będzie miała długość $x_1 \in \langle 0,l \rangle$.



Równania równowagi mają następującą postać:

$$\sum P_{x_1} = 0 \Leftrightarrow N(x_1) + 2ql = 0 \Rightarrow N(x_1) = -2ql$$

$$\sum P_{y_1} = 0 \Leftrightarrow T(x_1) - 2q \cdot x_1 - 2\sqrt{2}ql \sin\alpha = 0 \Rightarrow T(x_1) = 2qx_1 + 2ql$$

$$\sum M_{\gamma-\gamma} = 0 \Leftrightarrow M(x_1) + 2q \cdot x_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot x_1 + 2\sqrt{2}ql \sin\alpha \cdot x_1 = 0 \Rightarrow M(x_1) = -qx_1^2 - 2qlx_1$$

Nadal funkcja *N(x)* jest stała, *T(x)* jest zmienna liniowo, a *M(x)* zmienna parabolicznie. Siła poprzeczna *T*, czyli pochodna *M* nie zmienia znaku – nie ma ekstremum momentu w przęśle. Obliczmy wartości funkcji *T(x)* i *M(x)* na krańcach przedziału:

$$T_D = T(0) = 2q \cdot 0 + 2ql = 2ql$$

$$T_C^p = T(l) = 2q \cdot l + 2ql = 4ql$$

$$M_D = M(0) = -q \cdot 0^2 - 2ql \cdot 0 = 0$$

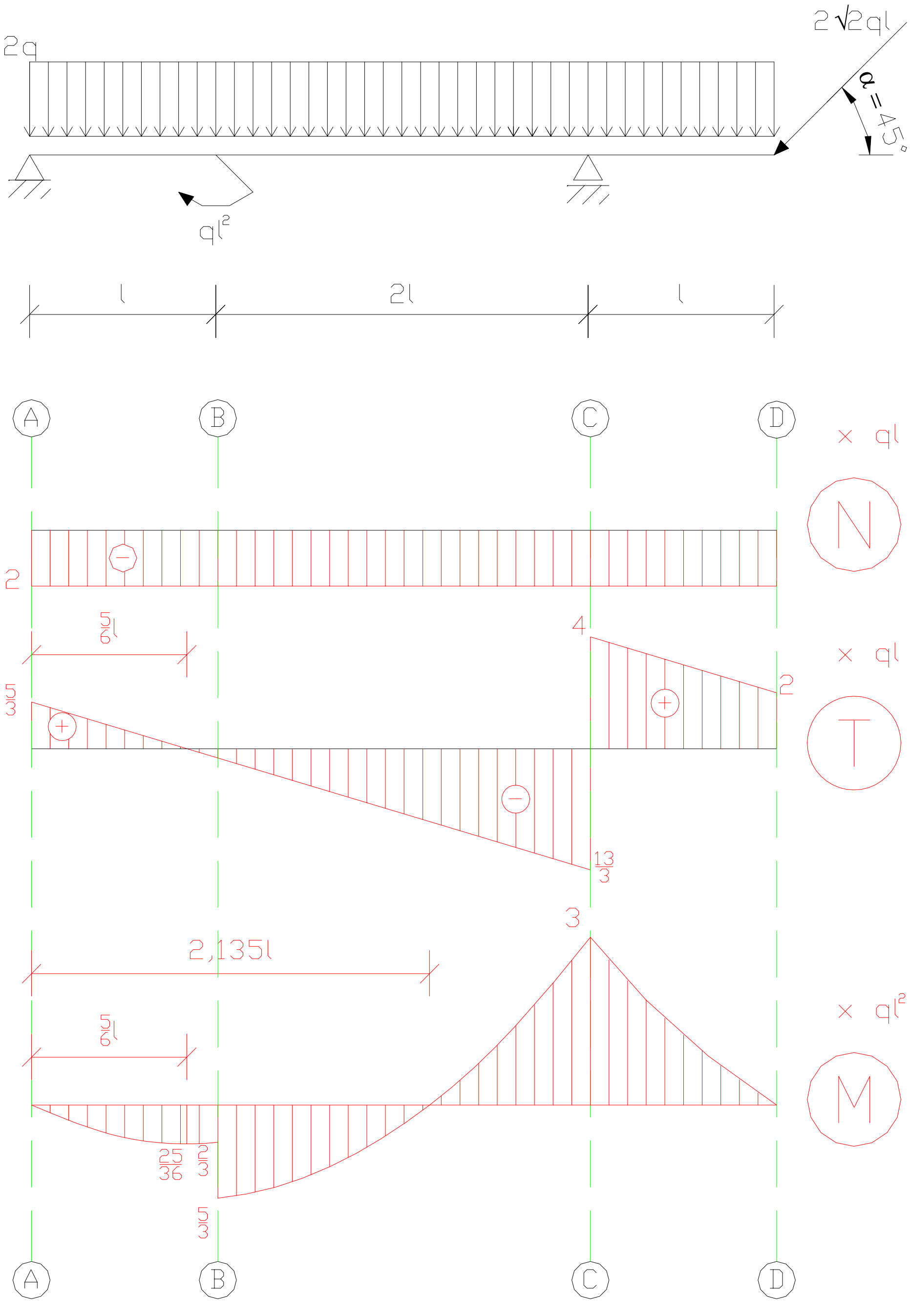
$$M_C^p = M(l) = -q \cdot l^2 - 2ql \cdot l = -3ql^2$$

W celu narysowania wykresu funkcji $M(x_1)$ policzmy wartość momentu w połowie przedziału:

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = -q \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 - 2ql \cdot \frac{l}{2} = -\frac{5}{4}ql^2$$

Rysując wykres momentu zginającego w przedziale C-D (ale również w A-B i B-C) należy pamiętać o wynikającej z równania $\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -q$ regule, że wykres momentu ma wypukłość na dole, jeśli *q* działa w dół, i – odwrotnie – do góry, jeśli *q* jest skierowane do góry.

Pamiętając o tym możemy narysować ostateczne postaci wykresów sił przekrojowych dla rozpatrywanej belki.



Porównując kształt wykresów sił przekrojowych z geometrią i obciążeniem belki można zauważyć następujące korelacje:

I. Dotyczy wykresu *N(x)*
1. W miejscu przyłożenia sił podłużnych (zewnętrznych, czy też reakcji) na wykresie musi wystąpić skok wartości funkcji o wartość przyłożonej siły.
2. Jeśli przyłożona siła powoduje rozciąganie belki to powoduje również zwiększenie siły *N*, jeśli ściskanie – zmniejszenie *N*.

II. Dotyczy wykresu *T(x)*
1. W miejscu przyłożenia skupionej siły poprzecznej na wykresie *T* musi wystąpić skok wartości funkcji o wartość przyłożonej siły.
2. Na odcinku, na którym przyłożona jest siła poprzeczna rozłożona równomiernie funkcja *T(x)* zmienia swą wartość liniowo.
3. Jeśli „poruszamy się" od lewej do prawej strony to obciążenie poprzeczne skierowane do góry zwiększa, a skierowane do dołu zmniejsz wartość siły *T(x)*; jeśli „poruszamy się" od prawej do lewej strony to obciążenie poprzeczne skierowane do dołu zwiększa, a skierowane do góry zmniejsza wartość siły *T(x).*

III. Dotyczy wykresu *M(x)*
1. W przypadku przyłożenia momentu skupionego na wykresie *M(x)* musi wystąpić skok wartości funkcji o wartość przyłożonego momentu.
2. Na odcinku, na którym jest siła poprzeczna *T(x)* zmienia swą liniowo, wykres *M(x)* zmienia się parabolicznie (bo $\frac{dM(x)}{dx} \equiv T(x)$).
3. W miejscu, gdzie wykres siły *T* się zeruje, na wykresie *M(x)* musi wystąpić ekstremum lokalne (bo $\frac{dM(x)}{dx} \equiv T(x)$).