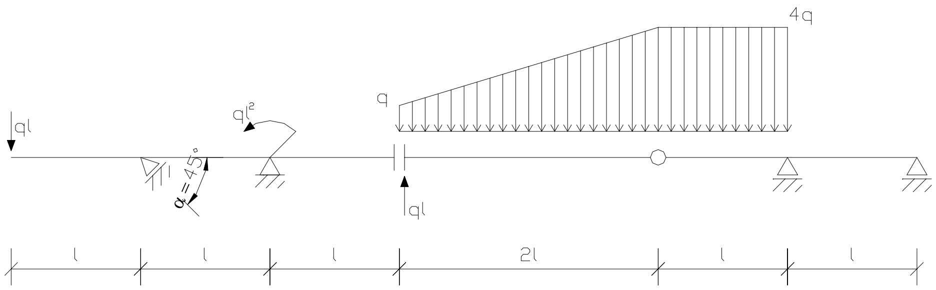
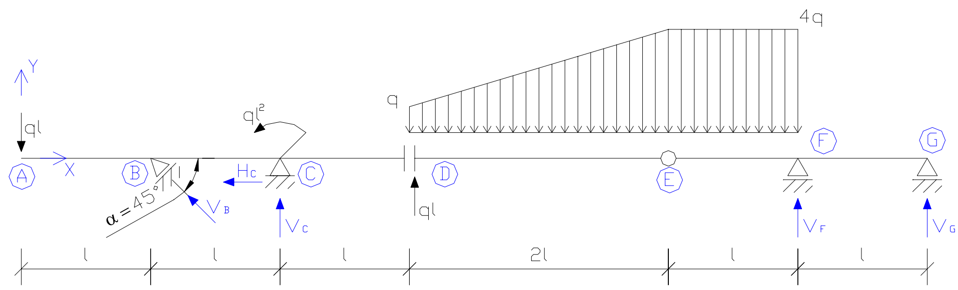
Przykład 7.2. Belka złożona. Obciążenie poprzeczne rozłożone, trapezowe.

Dla poniższej belki zapisać funkcje sił przekrojowych i sporządzić ich wykresy.

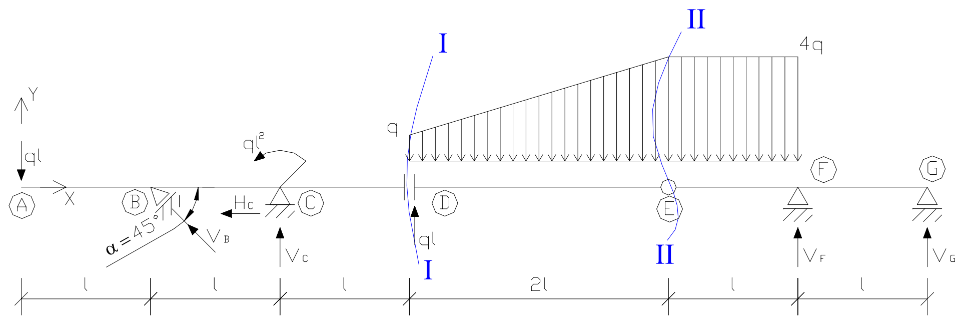


Rozwiązanie

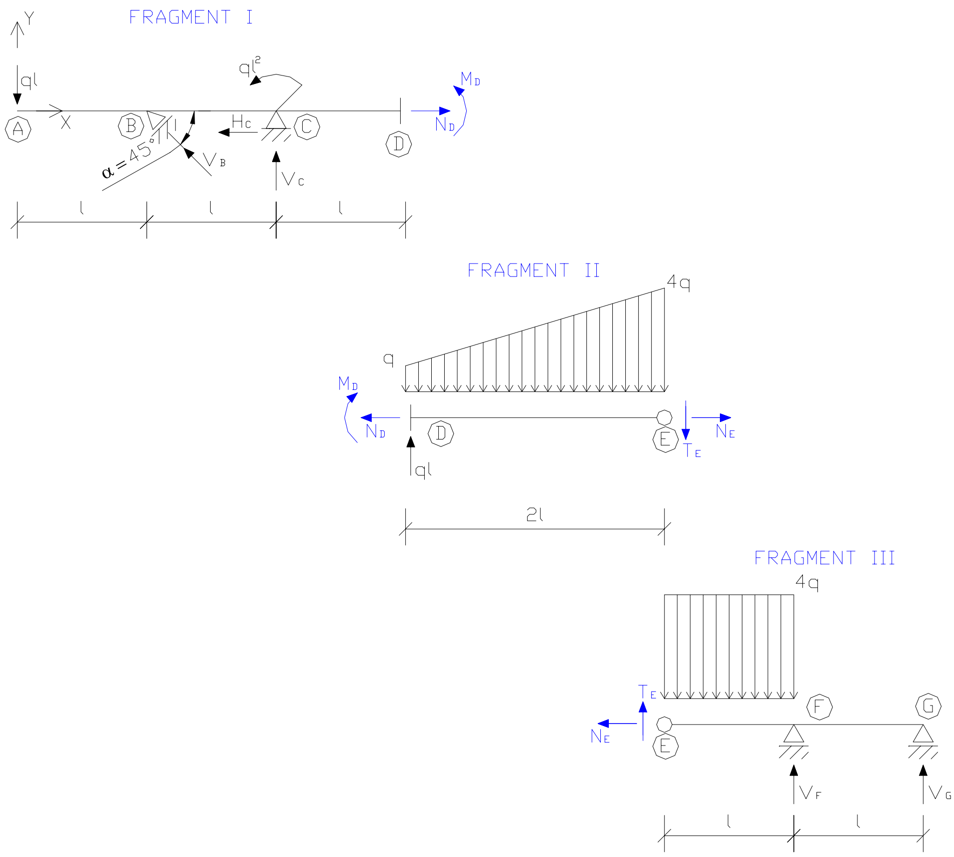
Oznaczamy punkty charakterystyczne, składowe reakcji i przyjmujemy układ współrzędnych XY.



W celu obliczenia reakcji podzielimy belkę na części „cięciami” I-I i II-II.



W miejscach „cięć” uzewnętrzniamy niezerowe siły działające w połączeniach.



Wykorzystując równania równowagi dla poszczególnych fragmentów obliczymy reakcje.

Dla fragmentu II:
Rozpatrywany fragment belki obciążony jest m. in. obciążeniem poprzecznym trapezowym. W celu uwzględnienia tego obciążenia należy podzielić je na obciążenie prostokątne i trójkątne i dokonać ich superpozycji.

$$\sum P_y = 0 \Leftrightarrow ql - T_E - \frac{1}{2}\cdot(q+4q)\cdot 2l = 0 \Rightarrow \underline{T_E = -4ql}$$

$$\sum M_E = 0 \Leftrightarrow ql\cdot 2l + M_D - q\cdot 2l\cdot\frac{1}{2}\cdot 2l - \frac{1}{2}\cdot(4q-q)\cdot 2l\cdot\frac{1}{3}\cdot 2l = 0 \Rightarrow \underline{M_D = 2ql^2}$$

Dla fragmentu III:

$$\sum P_x = 0 \Leftrightarrow \underline{N_E = 0}$$

$$\sum M_G = 0 \Leftrightarrow V_F\cdot l + T_E\cdot 2l - 4q\cdot l\cdot\left(l + \frac{1}{2}\cdot l\right) = 0 \Rightarrow V_F - 4ql\cdot 2 - 6ql = 0 \Rightarrow \underline{V_F = 14ql}$$

$$\sum P_y = 0 \Leftrightarrow V_F + V_G + T_E - 4q\cdot l = 0 \Rightarrow 14ql + V_G - 4ql - 4ql = 0 \Rightarrow \underline{V_G = -6ql}$$

Dla fragmentu II:

$$\sum P_x = 0 \Leftrightarrow N_D = N_E \Rightarrow \underline{N_D = 0}$$

Dla fragmentu I:

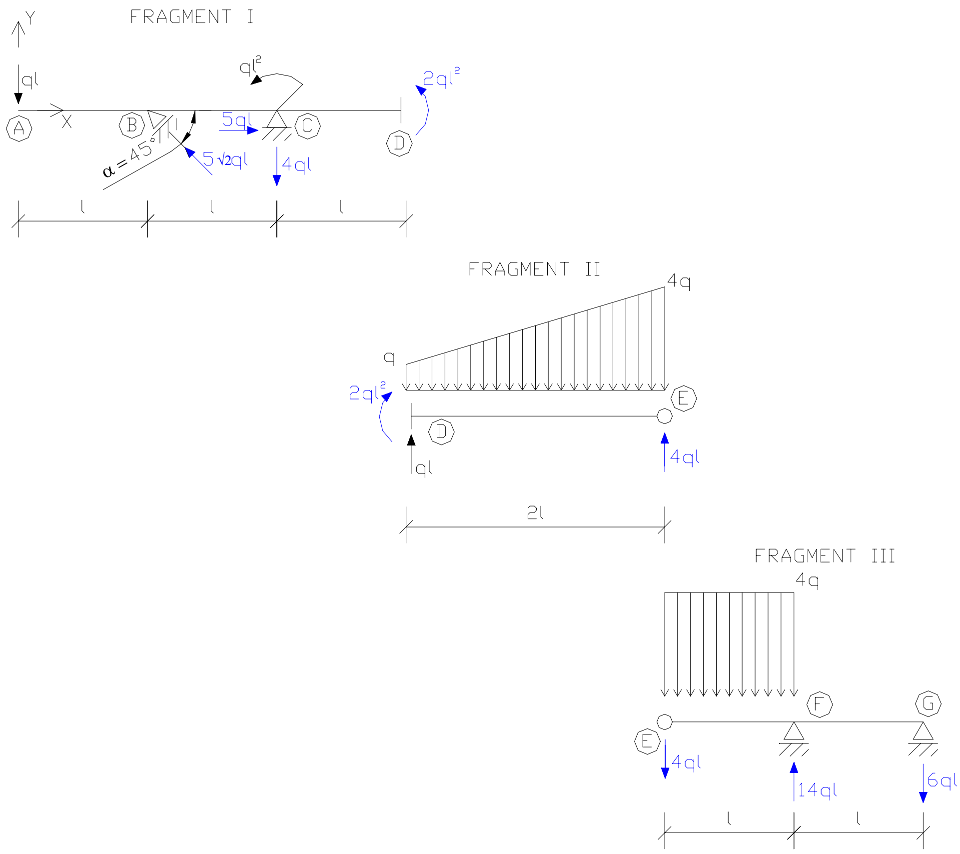
$$\sum M_C = 0 \Leftrightarrow -ql \cdot 2l + V_B \cdot sin\alpha \cdot l - ql^2 - M_D = 0 \Rightarrow -2ql^2 + V_B \cdot l \cdot sin\,45^o - ql^2 - 2ql^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5ql + V_B \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \underline{V_B = 5\sqrt{2}ql}$$

$$\sum P_x = 0 \Leftrightarrow -V_B \cdot cos\alpha + H_C + N_D = 0 \Rightarrow -5\sqrt{2}ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + H_C = 0 \Rightarrow \underline{H_C = 5ql}$$

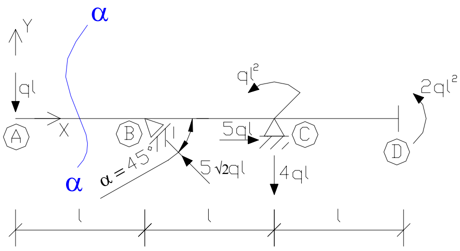
$$\sum P_y = 0 \Leftrightarrow V_B \cdot sin\alpha + V_C - ql = 0 \Rightarrow V_C = ql - 5\sqrt{2}ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \underline{V_C = -4ql}$$

Tak więc na belkę działają następujące obciążenia:

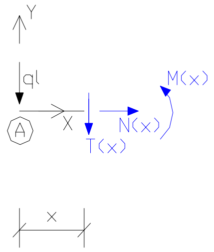


W celu znalezienia funkcji sił przekrojowych, podobnie jak w Przykładzie 7.1. dokonywać będziemy „przecięć" belki przekrojami pomiędzy punktami charakterystycznymi.

<u>Odcinek A-B</u>, $x \in \langle 0, l \rangle$



Rozpatrujemy lewą część fragmentu I:

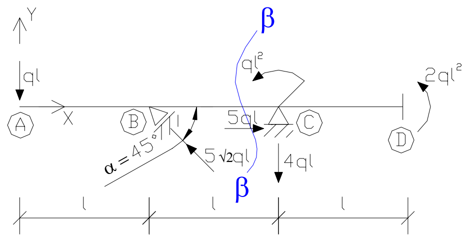


$$\sum P_x = 0 \Leftrightarrow N(x) = 0$$
$$\sum P_y = 0 \Leftrightarrow T(x) = -ql$$
$$\sum M_{\alpha-\alpha} = 0 \Leftrightarrow -M(x) - ql \cdot x = 0 \Rightarrow M(x) = -qlx$$

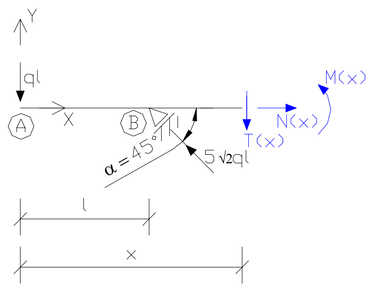
Funkcja $M(x)$ jest zmienna liniowo, więc do jej narysowania potrzebna jest znajomość jej wartości w dwóch punktach:

$$M_A = M(0) = 0$$
$$M_B^l = M(l) = -ql^2$$

<u>Odcinek B-C</u>, $x \in \langle l, 2l \rangle$



Rozpatrujemy lewą część fragmentu I:



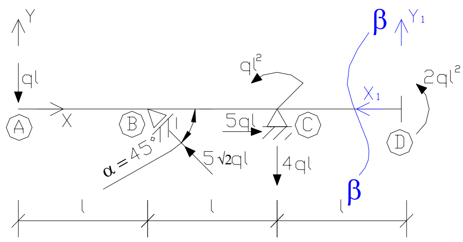
$$\sum P_x = 0 \Leftrightarrow N(x) = 5\sqrt{2}ql \cdot cos\alpha \Rightarrow N(x) = 5ql$$
$$\sum P_y = 0 \Leftrightarrow -ql + 5\sqrt{2}ql \cdot sin\alpha - T(x) = 0 \Rightarrow T(x) = 4ql$$
$$\sum M_{\beta-\beta} = 0 \Leftrightarrow -ql \cdot x + 5\sqrt{2}ql \cdot sin\alpha \cdot (x - l) - M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = 4qlx - 5ql^2$$

Funkcja $M(x)$ ponownie jest zmienna liniowo:

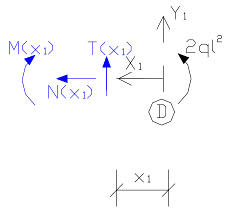
$$M_B^p = M(l) = -ql^2$$
$$M_C^l = M(2l) = 4ql \cdot 2l - 5ql^2 = 3ql^2$$

Odcinek D-C, $x_1 \in \langle 0, l \rangle$

W celu uproszczenia obliczeń wprowadzamy nowy układ współrzędnych X_1Y_1.



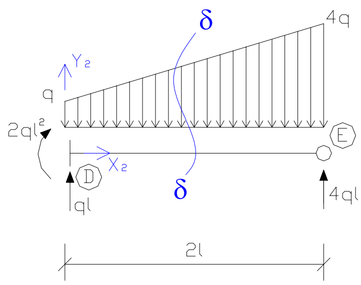
Rozpatrujemy prawą część fragmentu II:



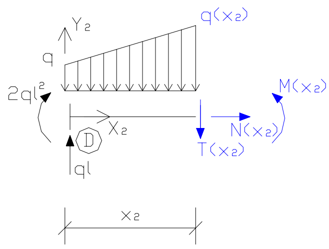
$$\sum P_x = 0 \Leftrightarrow N(x_1) = 0$$
$$\sum P_y = 0 \Leftrightarrow T(x_1) = 0$$
$$\sum M_{\gamma-\gamma} = 0 \Leftrightarrow M(x_1) = 2ql^2$$

Odcinek D-E, $x_2 \in \langle 0, 2l \rangle$

W celu uproszczenia obliczeń wprowadzamy nowy układ współrzędnych X_2Y_2.



Rozpatrujemy lewą część fragmentu II:



Znalezienie wartości $q(x_2)$ polega na napisaniu równania prostej przechodzącej przez punkty (0,q) i (2l,4q):

$q(x_2) = ax_2 + b$

Podstawiając współrzędne punktów:

$$\begin{cases} q = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = q \\ 4q = a \cdot 2l + q \Rightarrow a = \dfrac{3q}{2l} \end{cases}$$

Czyli

$$q(x_2) = \frac{3q}{2l} x_2 + q$$

Tak więc:

$$\sum P_{x_2} = 0 \Leftrightarrow N(x_2) = 0$$

$$\sum P_{y_2} = 0 \Leftrightarrow -ql - \frac{1}{2} \cdot [q(0) + q(x_2)] \cdot x_2 - T(x_2) = 0 \Rightarrow T(x_2) = ql - \frac{1}{2}\left(q + \frac{3q}{2l} x_2 + q \right) x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x_2) = -\frac{3q}{4l} x_2^{\,2} - qx_2 + ql$$

$$\sum M_{\delta-\delta} = 0 \Leftrightarrow ql \cdot x_2 + 2ql^2 - q \cdot x_2 \cdot \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} \cdot [q(0) + q(x_2)] \cdot x_2 \cdot \frac{1}{3} x_2 - M(x_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(x_2) = qlx_2 + 2ql^2 - \frac{1}{2} qx_2^{\,2} - \frac{1}{6}\left(\frac{3q}{2l} x_2 + q - q \right) x_2^{\,2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(x_2) = -\frac{1}{4} q \frac{x_2^{\,3}}{l} - \frac{1}{2} qx_2^{\,2} + qlx_2 + 2ql^2$$

Funkcja $T(x_2)$ jest zmienna parabolicznie, natomiast $M(x_2)$ jest wielomianem 3-go stopnia. Wartości tych funkcji na granicach przedziału są następujące:

$$T_D^p = T(0) = ql$$

$$T_E^l = T(2l) = -\frac{3q}{4l} \cdot (2l)^2 - q \cdot (2l) + ql = -4ql$$

$$M_D^p = M(0) = 2ql^2$$

$$M_E^l = M(2l) = -\frac{1}{4} q \frac{(2l)^3}{l} - \frac{1}{2} q (2l)^2 + ql(2l) + 2ql^2 = 0$$

Jak widać funkcja $T(x)$ zmienia znak, co oznacza, że punkcie zmiany znaku występuje ekstremum lokalne $M(x)$. W celu znalezienia punktu zerowania się funkcji $T(x)$ należy rozwiązać równanie kwadratowe:

$$-\frac{3q}{4l} x_2^{\,2} - qx_2 + ql = 0, \qquad x_2 \in \langle 0, 2l \rangle$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(-q)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{3q}{4l} \right) \cdot ql} = \sqrt{q^2 + 3q^2} = 2q$$

$$x_{2_1} = \frac{-(-q) - 2q}{2 \cdot \left(-\dfrac{3q}{4l} \right)} = -2l \notin D \equiv [0, 2l]$$

$$x_{2_2} = \frac{-(-q) + 2q}{2 \cdot \left(-\dfrac{3q}{4l} \right)} = \frac{2}{3} l$$

Tak więc:

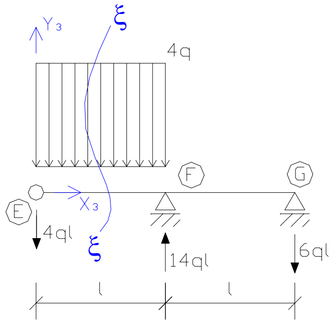
$$T\left(\frac{2}{3}l\right)=0$$

$$M_{ekstr.}=M\left(\frac{2}{3}l\right)=-\frac{1}{4}q\frac{\left(\frac{2}{3}l\right)^3}{l}-\frac{1}{2}q\left(\frac{2}{3}l\right)^2+ql\left(\frac{2}{3}l\right)+2ql^2=$$

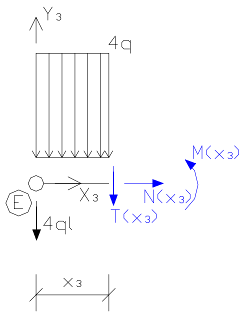
$$=-\frac{8}{4\cdot 27}ql^2-\frac{4}{18}ql^2+\frac{2}{3}ql^2+2ql^2=\frac{64}{27}ql^2\approx 2{,}37ql^2$$

<u>Odcinek E-F</u>, $x_3\in\langle 0,l\rangle$

W celu uproszczenia obliczeń wprowadzamy nowy układ współrzędnych X_3Y_3.



Rozpatrujemy lewą część fragmentu III:



$$\sum P_{x_3}=0\Leftrightarrow N(x_3)=0$$

$$\sum P_{y_3}=0\Leftrightarrow -4ql-4q\cdot x_3-T(x_3)=0\Rightarrow T(x_3)=-4ql-4qx_3$$

$$\sum M_{\xi-\xi}=0\Leftrightarrow -4ql\cdot x_3-4q\cdot x_3\cdot\frac{1}{2}x_3-M(x)=0\Rightarrow M(x)=-2qx_3{}^2-4qlx_3$$

Funkcja $T(x_3)$ jest zmienna liniowo, natomiast $M(x_3)$ parabolicznie. Wartości tych funkcji na granicach przedziału są następujące:

$$T_E^p=T(0)=-4ql$$

$$T_F^l=T(l)=-4ql-4q\cdot l=-8ql$$

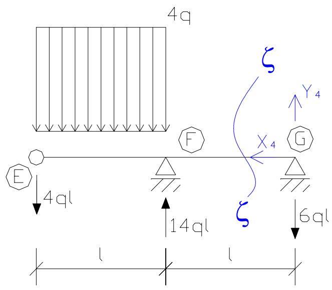
$$M_E^p=M(0)=0$$

$$M_F^l=M(l)=-2ql^2-4ql\cdot l=-6ql^2$$

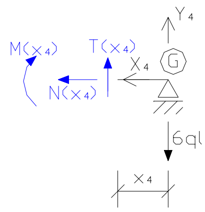
Ponieważ funkcja $T(x_3)$ nie zmienia znaku, więc w tym przedziale nie wystąpi lokalne ekstremum funkcji momentu zginającego. Kierunek wygięcia wykresu jednoznacznie określa kierunek działania obciążenia rozłożonego – działa ono do dołu, więc i wykres $M(x_3)$ ma wypukłość skierowaną do dołu.

<u>Odcinek G-F</u>, $x_4 \in \langle 0,l \rangle$

W celu uproszczenia obliczeń wprowadzamy nowy układ współrzędnych X_4Y_4.



Rozpatrujemy prawą część fragmentu III:

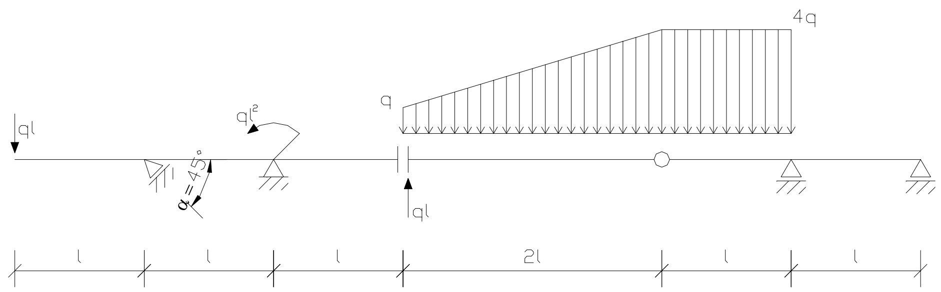


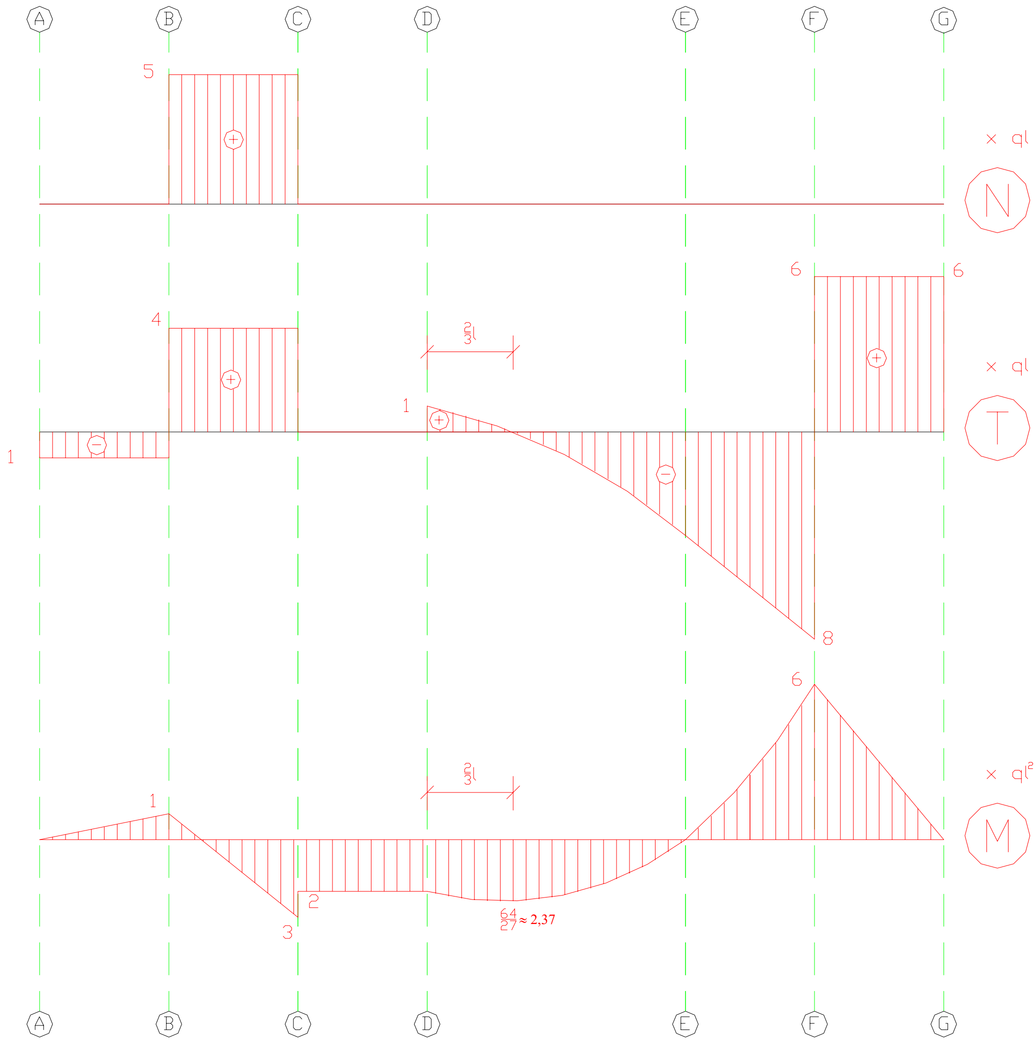
$$\sum P_x = 0 \Leftrightarrow N(x_4) = 0$$
$$\sum P_y = 0 \Leftrightarrow T(x_4) = 6ql$$
$$\sum M_{\zeta-\zeta} = 0 \Leftrightarrow M(x_4) + 6ql \cdot x_4 = 0 \Rightarrow M(x_4) = -6qlx_4$$

Jak widać funkcje $N(x_4)$ i $T(x_4)$ są stałe, natomiast $M(x_4)$ jest zmienna liniowo. Na granicach przedziału przyjmuje ona wartości:

$$M_G = M(0) = 0$$
$$M_F^p = M(l) = -6ql^2$$

Nanosząc uzyskane wyniki na wykresy uzyskujemy dla rozpatrywanej belki:





W celu sprawdzenia poprawności otrzymanych funkcji sił przekrojowych można wstawić je do różniczkowych równań równowagi:

$$\frac{dM}{dx} \equiv T, \qquad \frac{dT}{dx} \equiv -q$$

Dla przykładu sprawdzimy funkcje otrzymane w przedziale D-E:

$$\frac{dM(x_2)}{dx}=\frac{d\left(-\frac{1}{4}q\frac{x_2^3}{l}-\frac{1}{2}qx_2^2+qlx_2+2ql^2\right)}{dx}=-\frac{1}{4}q\cdot 3\frac{x_2^2}{l}-\frac{1}{2}q\cdot 2x_2+ql=$$

$$=-\frac{3}{4}\frac{q}{l}x_2^2-qx_2+ql\equiv T(x_2)$$

$$\frac{dT(x_2)}{dx}=\frac{d\left(-\frac{3}{4}\frac{q}{l}x_2^2-qx_2+ql\right)}{dx}=-\frac{3}{4}\frac{q}{l}\cdot 2x_2-q=-\frac{3}{2}\frac{q}{l}x_2-q=-\left(\frac{3}{2}\frac{q}{l}x_2+q\right)\equiv -q(x_2)$$

Jak widać wyniki się zgadzają.

Spostrzeżenia zapisane w Przykładzie 7.1. możemy uzupełnić o kolejne:

II. Dotyczy wykresu $T(x)$

4. Jeżeli na danym odcinku nie działa siła poprzeczna rozłożona, to wykres $T(x)$ na tym odcinku jest stały ($T = const.$).
5. Na odcinku, na którym działa obciążenie poprzeczne rozłożone, liniowo zmienne, wykres siły $T(x)$ jest parabolą.
6. W miejscu występowania teleskopu siła T jest równa 0, o ile nie występuje tam siła skupiona.

III. Dotyczy wykresu $M(x)$

4. Na odcinku, na którym siła poprzeczna $T(x)$ jest stała, wykres $M(x)$ zmienia się liniowo.
5. Na odcinku, na którym siła poprzeczna $T(x)=0$, wykres $M(x)$ jest stały.
6. Na odcinku, na którym siła poprzeczna $T(x)$ zmienia się parabolicznie, wykres $M(x)$ jest parabolą 3-go stopnia.
7. W przegubie wykres $M(x)$ się zeruje, jeśli nie występuje w tym przekroju moment skupiony.