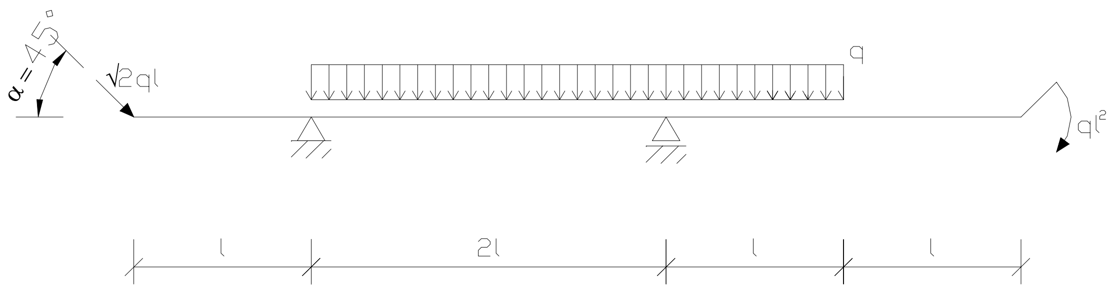
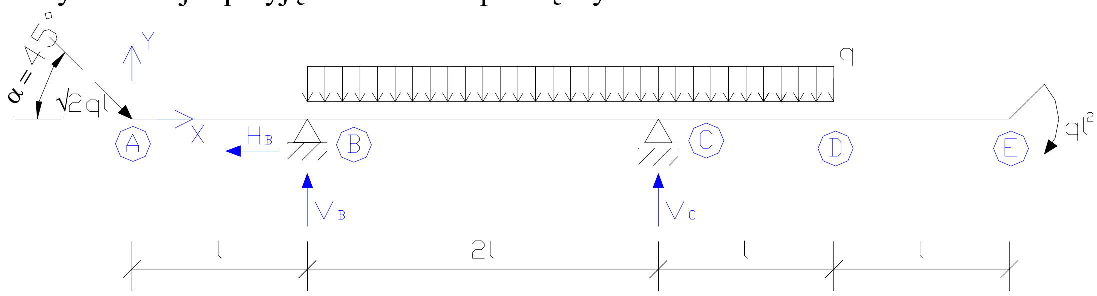
Przykład 7.3. Belka jednoprzęsłowa z dwoma wspornikami

Narysować wykresy sił przekrojowych dla poniższej belki.



Rozwiązanie

Rozwiązywanie zadania rozpocząć należy od oznaczenia punktów charakterystycznych, składowych reakcji i przyjęcia układu współrzędnych.



W celu obliczenia reakcji należy wykorzystać trzy równania równowagi:

$$\sum P_x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}ql \cdot cos\alpha - H_B = 0 \Rightarrow H_B = \sqrt{2}ql \cdot cos\,45^o \Rightarrow H_B = \sqrt{2}ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{H_B = ql}$$

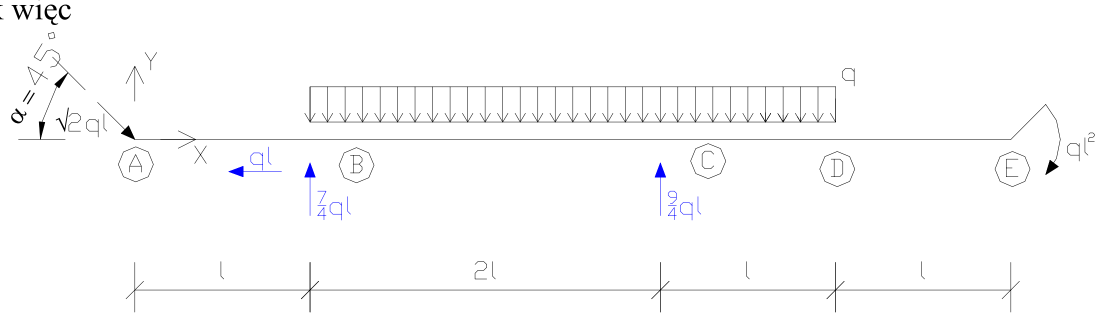
$$\sum M_B = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}ql \cdot sin\alpha + q \cdot 3l \cdot \frac{1}{2} \cdot 3l - V_C \cdot 2l + ql^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2V_C = -\sqrt{2}ql \cdot sin\,45^o + \frac{9}{2}ql + ql \Rightarrow 2V_C = -\sqrt{2}ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{11}{2}ql \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2V_C = \frac{9}{2}ql \Rightarrow \underline{V_C = \frac{9}{4}ql}$$

$$\sum P_y = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}ql \cdot sin\alpha + V_B - q \cdot 3l + V_C = 0 \Rightarrow V_B = \sqrt{2}ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 3ql - \frac{9}{4}ql \Rightarrow \underline{V_B = \frac{7}{4}ql}$$

Tak więc



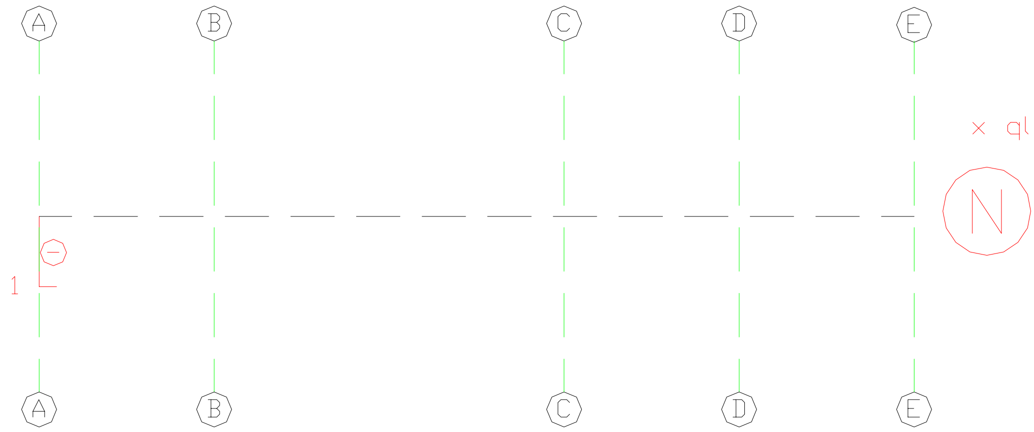
Obecnie możemy już przystąpić do rysowania wykresów sił przekrojowych.

Wykres siły normalnej *N*

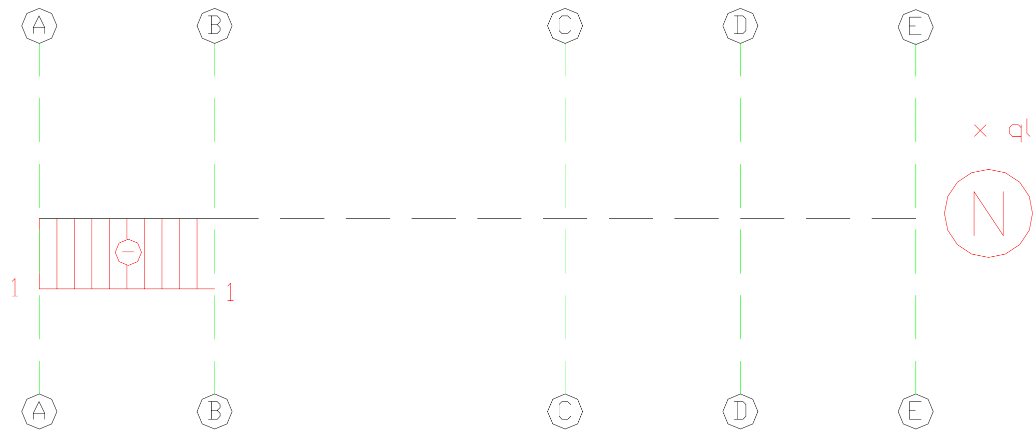
Rysowanie wykresu sił normalnych rozpoczniemy na lewym końcu belki, tj. w punkcie A. W punkcie tym przyłożona jest siła skupiona, mająca niezerową składową poziomą. Oznacza to, że punkcie A występuje siła normalna równa co do wartości bezwzględnej wielkości tej składowej, czyli

$$|N| = \sqrt{2}ql \cdot \cos\alpha = \sqrt{2}ql \cdot \cos 45^o = \sqrt{2}ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = ql$$

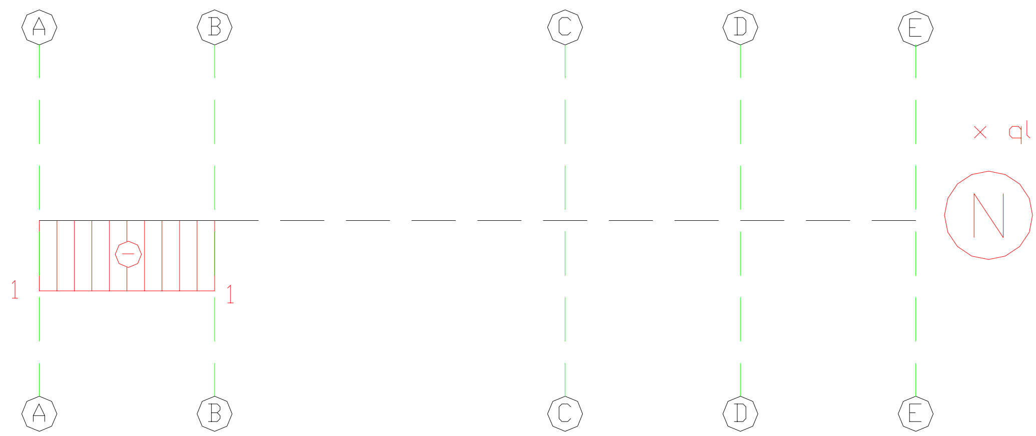
W celu określenia znaku siły normalnej należy zbadać, czy przyłożona siła zewnętrzna ściska czy rozciąga belkę. Pamiętając, że rozciąganie oznacza dodatni kierunek siły normalnej, zaś ściskanie - ujemny oraz zauważywszy, że składowa pozioma rozpatrywanej siły powoduje ściskanie możemy wrysować na wykres *N* wartość siły w punkcie A:



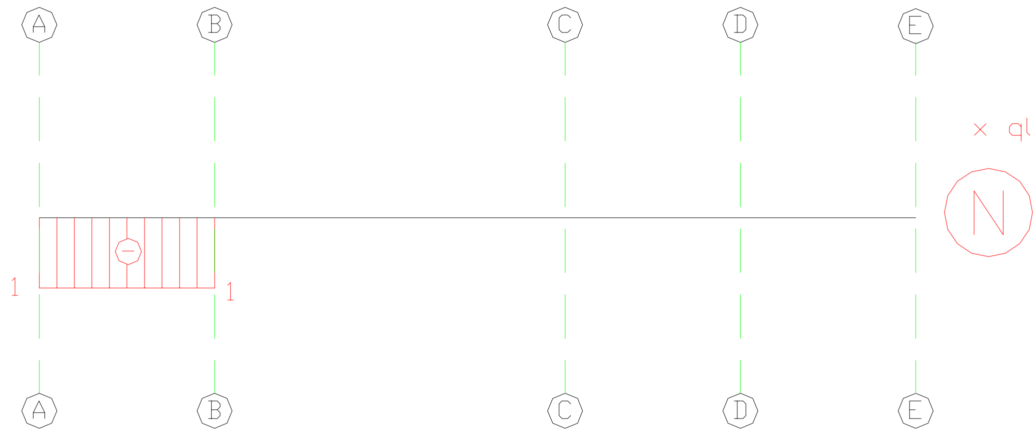
Ponieważ pomiędzy punktami A i B brak jakiegokolwiek obciążenia podłużnego, więc wartość siły *N* pozostaje niezmieniona:



W punkcie B przyłożona jest pozioma reakcja o wartości ql skierowana w lewo, tj. rozciągająca belkę (należy zauważyć, że siła pozioma skierowana w lewo rozciąga, a skierowana w prawo ściska belkę gdy rozpatrujemy belkę od strony lewej; w przeciwnym wypadku, tj. gdy rozpatrujemy prawą część belki siła pozioma skierowana w lewo ściska, a skierowana w prawo rozciąga badaną belkę). Oznacza to, że w punkcie B musi nastąpić skokowe zwiększenie się wartości siły normalnej $N = -ql$ o wartość reakcji, tj. $+ql$ czyli z prawej strony podpory B mamy $N = -ql + ql = 0$.

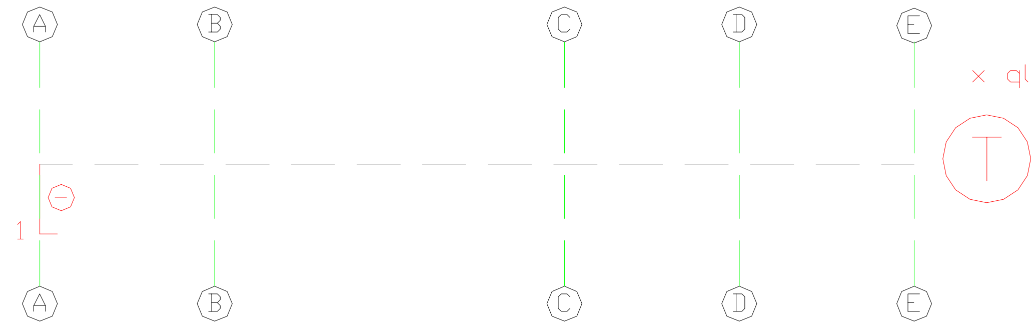


Na pozostałej części belki, tj. między B, a E obciążenia podłużne nie występują, czyli wykres się nie zmienia.

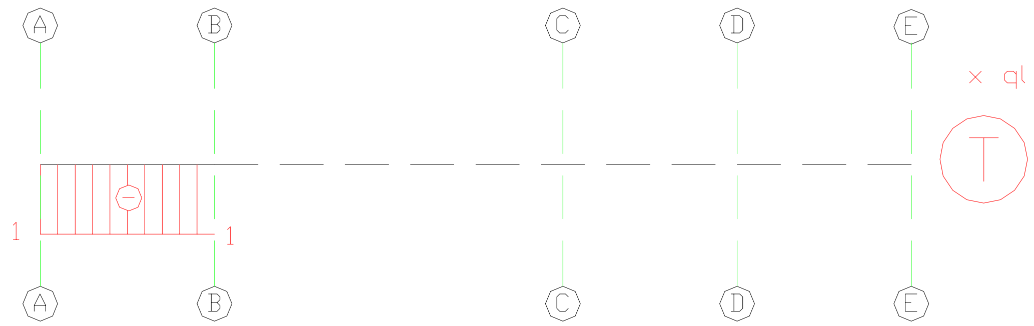


Wykres siły tnącej *T*

Rysowanie ponownie zaczynamy w punkcie A, przesuwać się będziemy w prawo. W punkcie A przyłożona siła skupiona ma składową pionową skierowaną w dół o wartości $\sqrt{2}ql \cdot sin\alpha = \sqrt{2}ql \cdot sin\,45^o = \sqrt{2}ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = ql$. Oznacza to, że wartość siły tnącej na początku belki wynosi $-ql$ (ponieważ wywołuje obrót rozważanej części układu przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara).



Na odcinku A-B brak obciążeń poprzecznych, więc wartość siły *T* się nie zmienia.



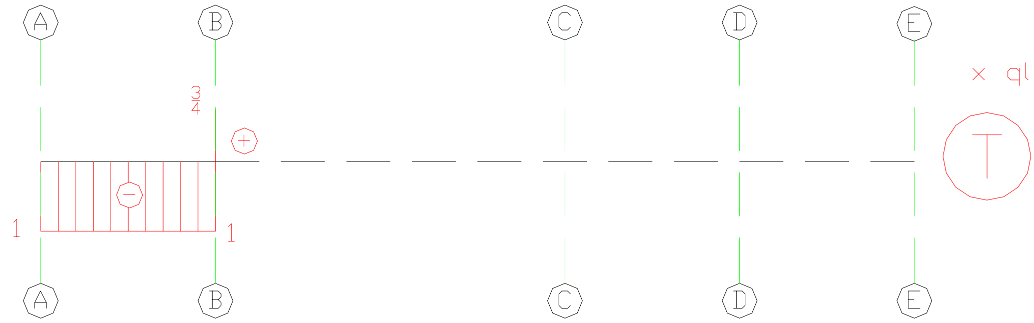
W punkcie B działa reakcja pionowa $\frac{7}{4}ql$ starająca się obrócić lewą część belki zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, co oznacza skokowe zwiększenie wartości siły tnącej o $\frac{7}{4}ql$, czyli:

$$T_B^l = -ql$$

$$T_B^p = T_B^l + \frac{7}{4}ql = \frac{3}{4}ql$$

przy czym indeksy górne *l* i *p* oznaczają odpowiednio lewą i prawą stronę punktu wskazanego przez indeks dolny.

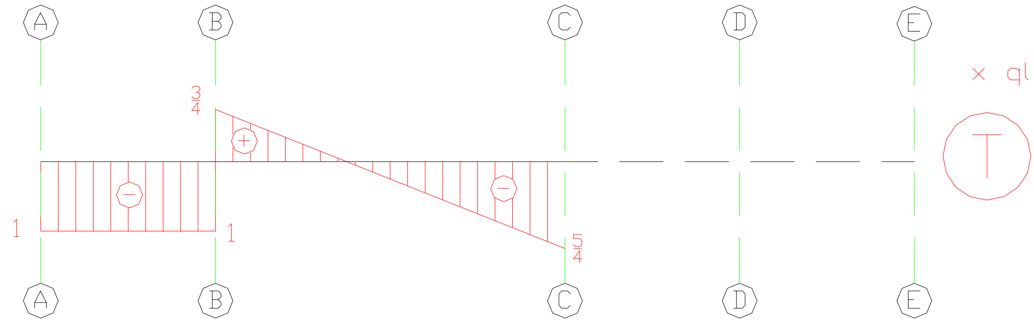
Tak więc mamy:



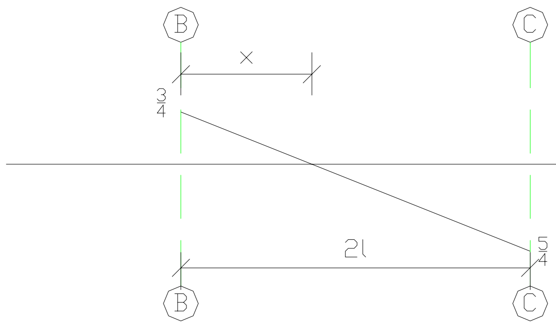
Na odcinku B-C działa obciążenie poprzeczne równomiernie rozłożone o wartości q, skierowane ku dołowi. Oznacza to, że na odcinku długości $2l$ od punktu B do C wykres siły T musi być zmienny liniowo i malejący. Różnica wartości siły T pomiędzy punktami B i C jest równa wypadkowej obciążenia rozłożonego na tym odcinku, tj. $q \cdot 2l = 2ql$.

$$T_B^p = \frac{3}{4} ql$$

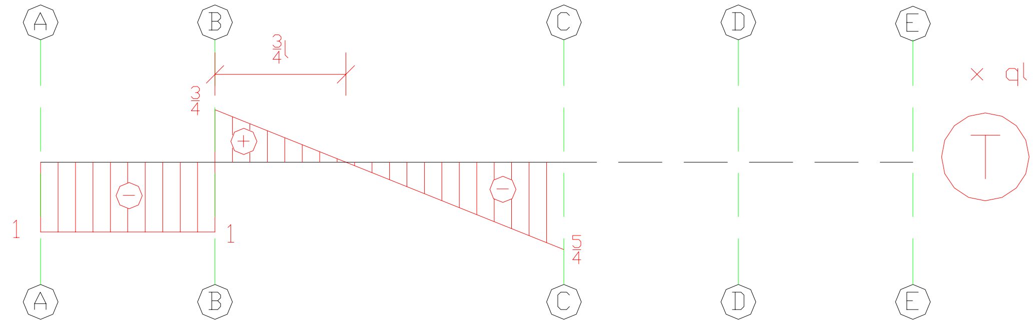
$$T_C^l = T_B^p - 2ql = -\frac{5}{4} ql$$



Ponieważ wykres zmienia znak istnieje potrzeba wyznaczenia miejsca zerowania się funkcji $T(x)$, gdyż w tym punkcie występuje ekstremum lokalne momentu zginającego. Położenie tego punktu najłatwiej obliczyć z proporcji:



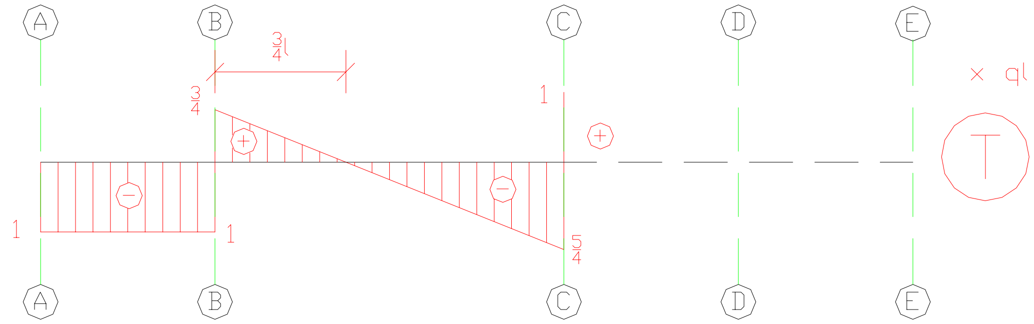
$$\frac{\frac{3}{4} ql}{x} = \frac{\frac{5}{4} ql + \frac{3}{4} ql}{2l} \Rightarrow 2qlx = \frac{3}{2} ql^2 \Rightarrow x = \frac{3}{4} l$$



W punkcie C działa reakcja o wartości $\frac{9}{4}ql$ skierowana do góry, co powoduje wystąpienie w tym punkcie skokowej zmiany wartości T o $+\frac{9}{4}ql$, czyli:

$$T_C^l = -\frac{5}{4}ql$$

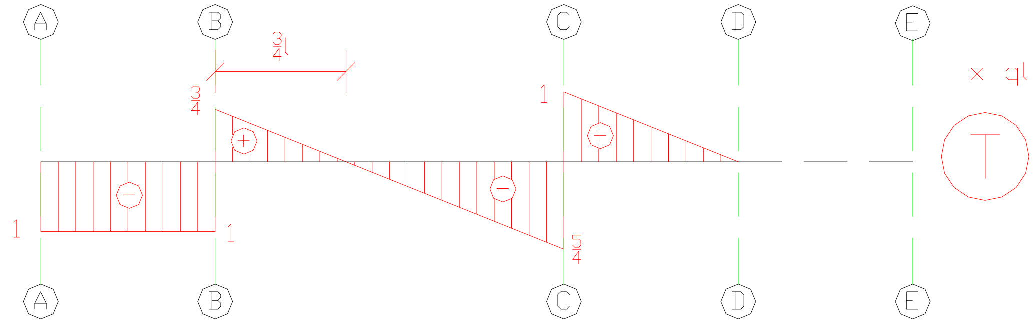
$$T_C^p = T_C^l + \frac{9}{4}ql = ql$$



Na odcinku C-D o długości l działa skierowane do dołu obciążenie równomiernie rozłożone q, co powoduje, że funkcja T na tym odcinku maleje liniowo o ql, stąd

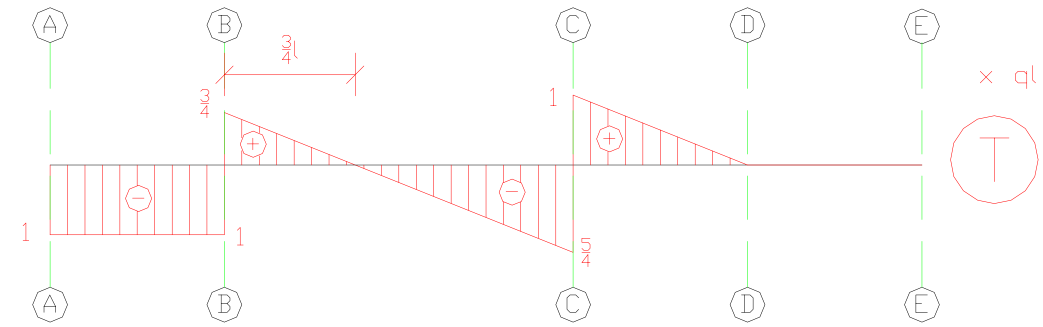
$$T_C^p = ql$$

$$T_D^l = T_C^P - ql = 0$$



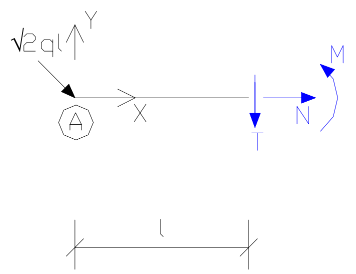
Ponieważ ani w punkcie D, ani na końcowym odcinku D-E nie występują obciążenia poprzeczne wartość siły tnącej T do końca belki się nie zmienia ($T=0$).

Tak więc ostatecznie wykres siły tnącej ma postać:



Wykres momentu zginającego *M*

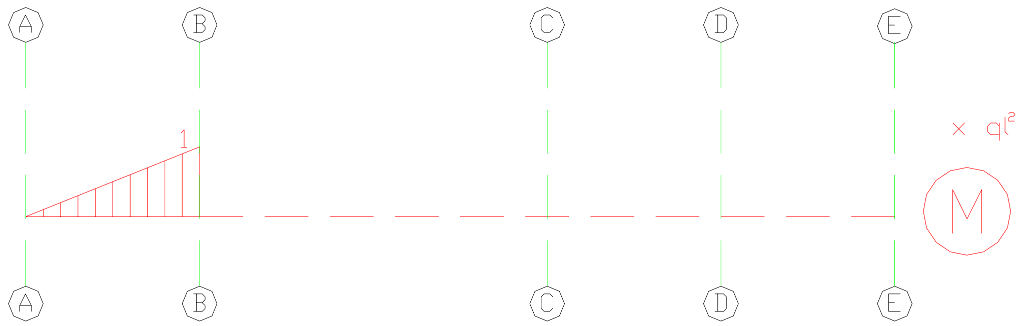
Zaczynamy od punktu A. W punkcie tym nie występuje moment skupiony, więc $M=0$. Na odcinku A-B, jak wynika z wykresu T, siła tnąca jest stała, co oznacza, że wykres momentu musi się zmieniać liniowo od 0 w punkcie A. Wartość momentu w punkcie B można łatwo policzyć „przecinając" belkę w tym punkcie, uzewnętrzniając siły wewnętrzne i rozpatrując lewą część belki.



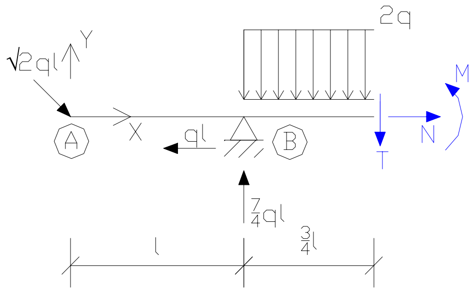
Z równowagi momentów w punkcie B wynika

$$\sum M_B^l = 0 \Leftrightarrow M_B^l + ql \cdot l = 0 \Rightarrow M_B^l = -ql^2$$

Minus oznacza, że rzeczywisty kierunek momentu jest przeciwnie skierowany do założonego, czyli rozciągane są górne włókna belki. Pamiętając, że wykres momentów rysujemy zawsze po stronie włókien rozciąganych kreślimy w punkcie B do góry wartość ql i łączymy linią prostą (wszak wykres ma być liniowy) z zerem w punkcie A:



W punkcie B nie występuje moment skupiony, więc $M_B^p = M_B^l = -ql^2$. Na odcinku B-C wykres T zmienia się liniowo, co oznacza, że wykres M musi zmieniać się parabolicznie. W punkcie odległym o $\frac{3}{4}l$ od punktu B, tj. w miejscu zerowania się wykresu T wykres M osiąga ekstremum lokalne o wartości:



$$M_{ekstr.} = \frac{7}{4}ql \cdot \frac{3}{4}l - \sqrt{2}ql \cdot \sin 45^o \cdot \left(l + \frac{3}{4}l\right) - q \cdot \frac{3}{4}l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}l = \left(\frac{21}{16} - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7}{4} - \frac{9}{32}\right)ql^2 = -\frac{23}{32}ql^2$$

Inną metodą uzyskania wartości ekstremalnej momentu jest wykorzystanie faktu wynikającego z równań różniczkowych równowagi

$$\frac{dM(x)}{dx} = T(x) \Rightarrow M(x) - M(x_0) = \int_{x_0}^{x} T(x)dx\,,$$

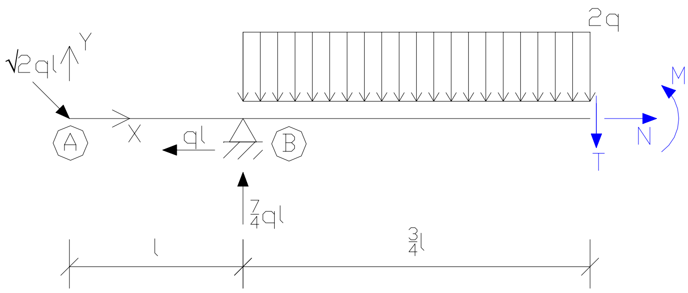
a mianowicie, że zmiana wartości momentu na danym odcinku jest równa polu pod wykresem siły tnącej na tym odcinku (pole to może być dodatnie lub ujemne w zależności od tego jaki znak ma siła tnąca). W rozpatrywanym przypadku mamy

$$\Delta M_{B-ekstr.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}l \cdot \frac{3}{4}ql = \frac{9}{32}ql^2$$

$$M_{ekstr.} = M_B + \Delta M_{B-ekstr.} = -ql^2 + \frac{9}{32}ql^2 = -\frac{23}{32}ql^2$$

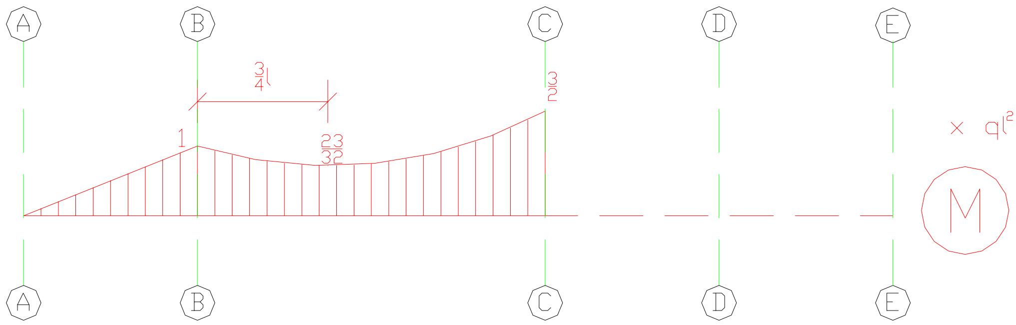
Znak „+” we wzorze na $M_{ekstr.}$ występuje gdyż poruszamy się wzdłuż belki w prawo; w przypadku ruchu w lewo należy stosować odejmowanie.

Podobnie jak moment ekstremalny obliczymy moment w punkcie C.

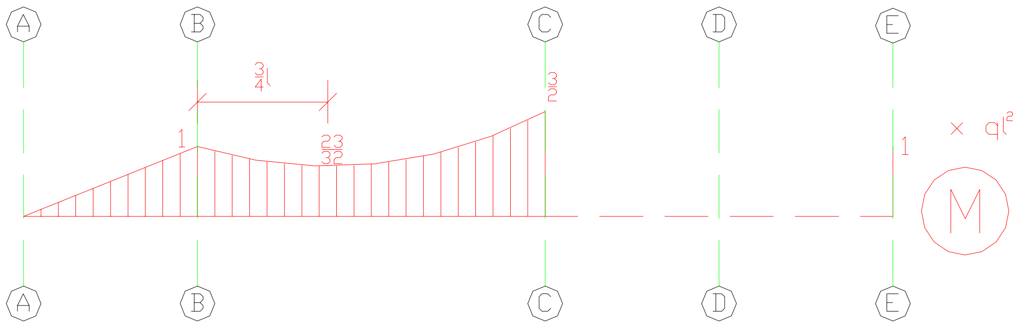


$$M_C^l = \frac{7}{4}ql \cdot 2l - \sqrt{2}ql \cdot \sin 45^o \cdot (l + 2l) - q \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} \cdot 2l = \left(\frac{7}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3 - 2 \right) ql^2 = -\frac{3}{2} ql^2$$

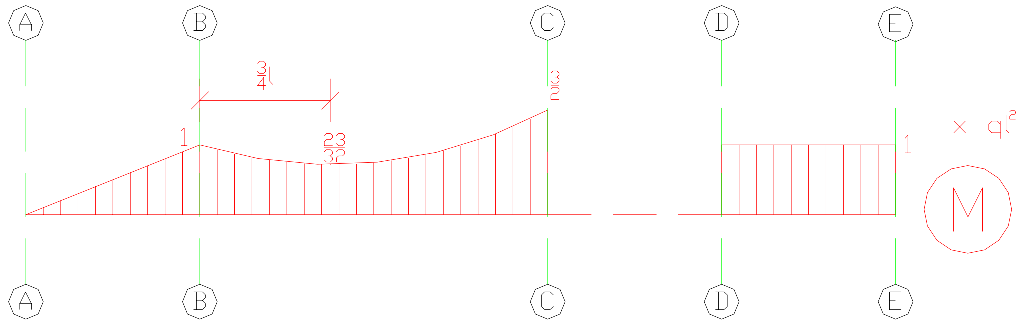
Brak momentów skupionych w punkcie C oznacza, że wartości momentu zginającego z prawej i z lewej strony tego punktu są identyczne (nie występuje skok wartości). Wykres wygląda więc następująco



Dalszą część wykresu narysujemy rozpatrując prawą część belki. W punkcie E przyłożony jest moment skupiony rozciągający górne włókna belki o wartości ql^2



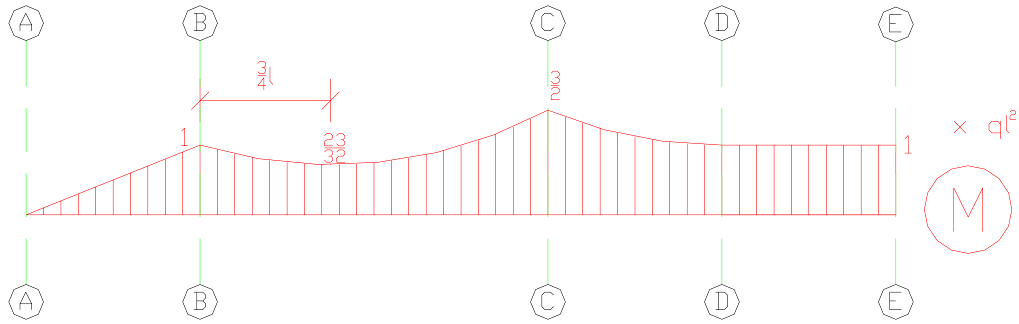
Na odcinku E-D siła tnąca równa jest zeru, co oznacza, że wartość momentu się nie zmienia.



W punkcie D brak momentu skupionego, więc nie występuje tu skok wartości funkcji *M*. Z kolei na odcinku D-C wykres siły tnącej zmienia się liniowo, co oznacza, że wykres momentu musi zmieniać się na tym odcinku parabolicznie pomiędzy $M_C = \frac{3}{2}ql^2$ i $M_D = ql^2$.

Ponieważ siła tnąca pomiędzy punktami C i D nie zmienia znaku więc nie występuje tu ekstremum. Kierunek wygięcia paraboli można ustalić uwzględniając fakt, że w punkcie D nie występuje skokowa zmiana znaku siły *T*, co oznacza, że styczne do wykresu po obu stronach punktu D pokrywają się.

Tak więc ostatecznie:



Dla ukazania zależności pomiędzy geometrią, sposobem podparcia i obciążenia belki oraz wykresami sił przekrojowych umieszczony został poniżej rysunek zbiorczy.