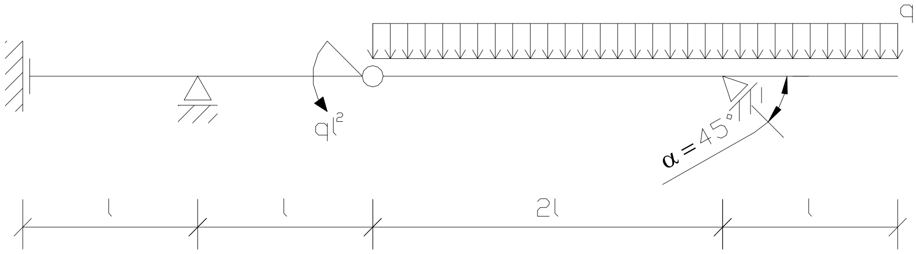
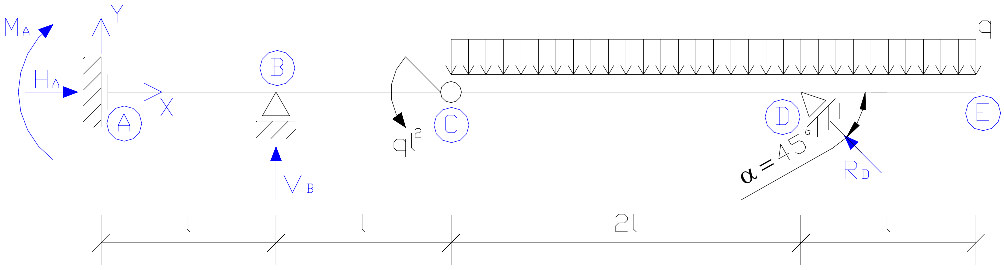
Przykład 7.4. Belka złożona – połączenie przegubowe

Narysować wykresy sił przekrojowych dla poniższej belki.



Rozwiązanie

Rozwiązywanie zadania rozpocząć należy od oznaczenia punktów charakterystycznych, składowych reakcji i przyjęcia układu współrzędnych.



W celu obliczenia reakcji należy wykorzystać równania równowagi. Ponieważ belki połączone przegubem oddziaływają na siebie wyłącznie poprzez siły podłużne i poprzeczne, a nie przekazują momentu zginającego, moment ten policzony dla jednej bądź drugiej z belek musi być równy zero. Korzystając z tego warunku możemy napisać cztery równania równowagi:

$$\sum M_C^{\alpha-\alpha,p} = 0 \Leftrightarrow q \cdot 3l \cdot \frac{1}{2} \cdot 3l - R_D \cdot \sin\alpha \cdot 2l = 0 \Rightarrow \frac{9}{2}ql - 2R_D \cdot \sin 45^o = 0 \Rightarrow 2R_D \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{9}{2}ql \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{R_D = \frac{9}{4}\sqrt{2}ql}$$

$$\sum P_x = 0 \Leftrightarrow H_A - R_B \cdot \cos\alpha - = 0 \Rightarrow H_A = \frac{9}{4}\sqrt{2}ql \cdot \cos 45^o \Rightarrow H_A = \frac{9}{4}\sqrt{2}ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{H_A = \frac{9}{4}ql}$$

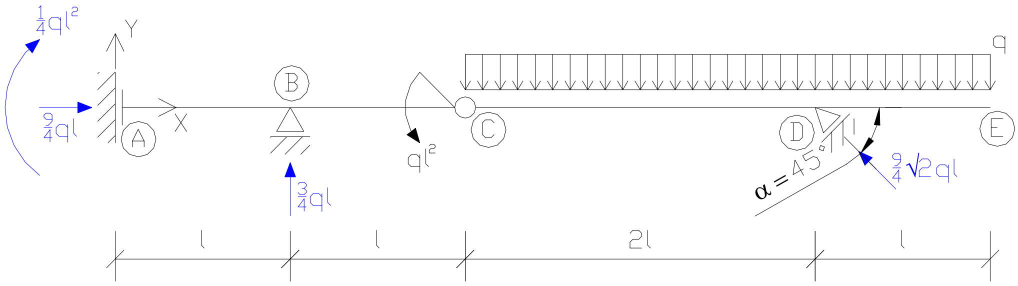
$$\sum P_y = 0 \Leftrightarrow V_B - q \cdot 3l + R_B \cdot \sin\alpha = 0 \Rightarrow V_B = 3ql - \frac{9}{4}\sqrt{2}ql \cdot \cos 45^o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_B = 3ql - \frac{9}{4}\sqrt{2}ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{V_B = \frac{3}{4}ql}$$

$$\sum M_C^{\alpha-\alpha,l} = 0 \Leftrightarrow M_A + V_B \cdot l - ql^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_A = ql^2 - \frac{3}{4}ql \cdot l \Rightarrow \underline{M_A = \frac{1}{4}ql^2}$$

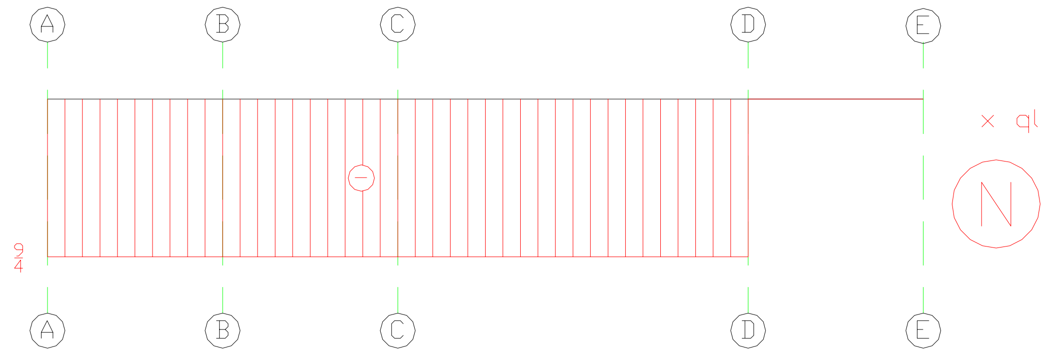
Tak więc



Obecnie możemy już przystąpić do rysowania wykresów sił przekrojowych.

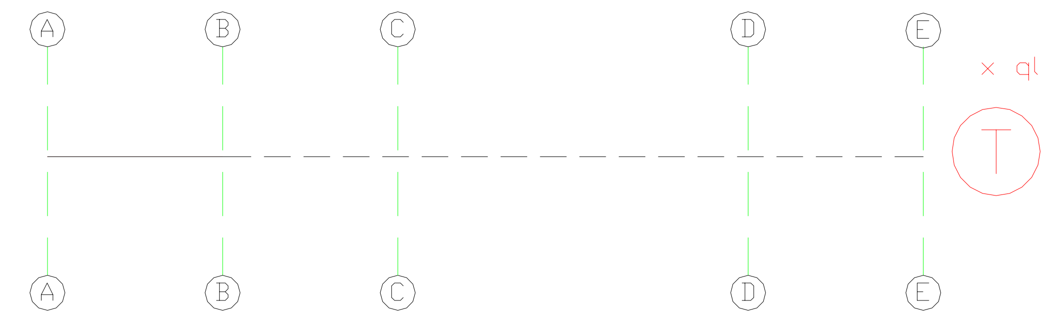
Wykres siły normalnej *N*

Jak widać jedynym obciążeniem podłużnym działającym na rozpatrywaną belkę są siły skupione - reakcje podpór działające w punktach A i D. Wynika z tego, że na wykresie *N* w punktach tych musi pojawić się skok wartości funkcji *N(x)*, natomiast pomiędzy nimi wykres musi być stały. Kierunek działania reakcji – „do belki" – oznacza ujemny znak siły *N*. Poza odcinkiem A-D, tj. na odcinku D-E siła *N=0*.

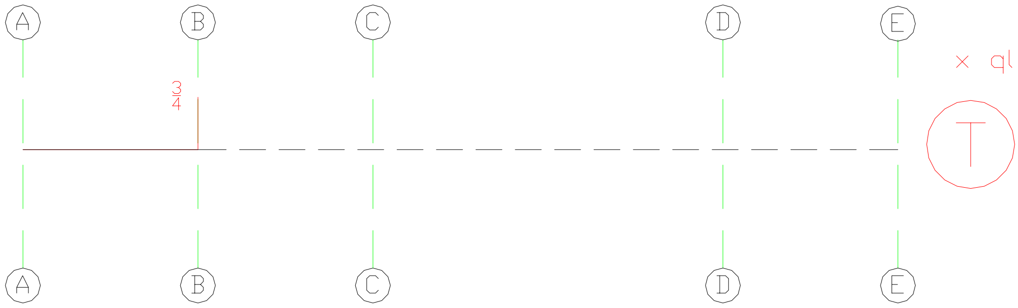


Wykres siły tnącej *T*

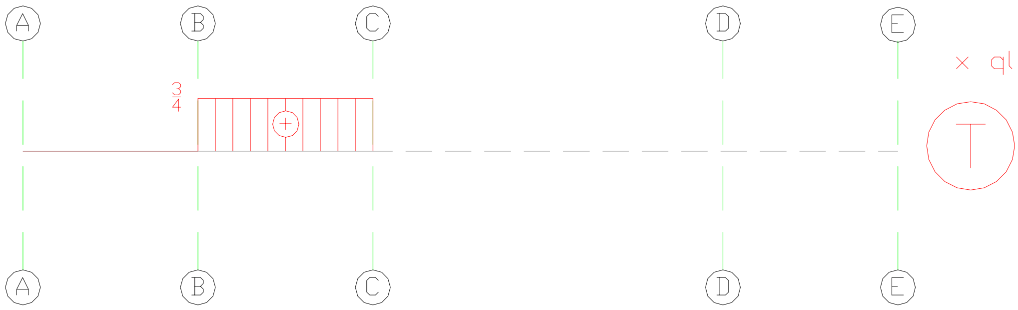
Rysowanie ponownie zaczynamy w punkcie A, przesuwać się będziemy w prawo. Ponieważ na odcinku A-B nie występują siły działające prostopadle do belek, więc *N=0*.



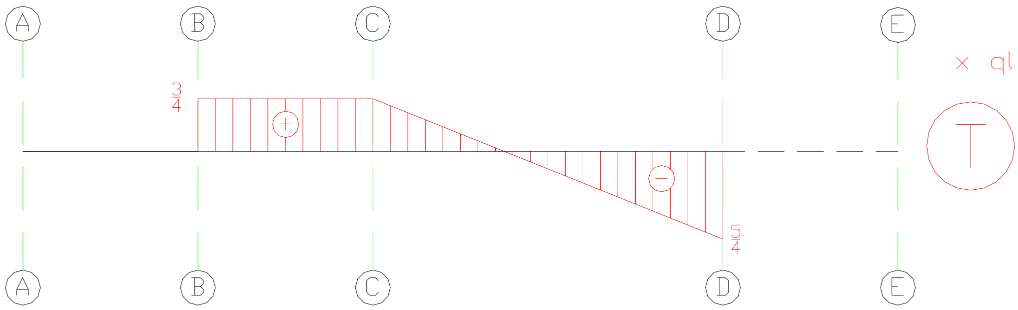
W punkcie B przyłożona jest siła $\frac{3}{4}ql$ wywołująca obrót rozważanej (lewej) części układu zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, co oznacza, że siła T zwiększa się skokowo w tym punkcie o $\frac{3}{4}ql$.



Na odcinku B-C nie występują obciążenia poprzeczne, więc funkcja *T(x)* jest stała.

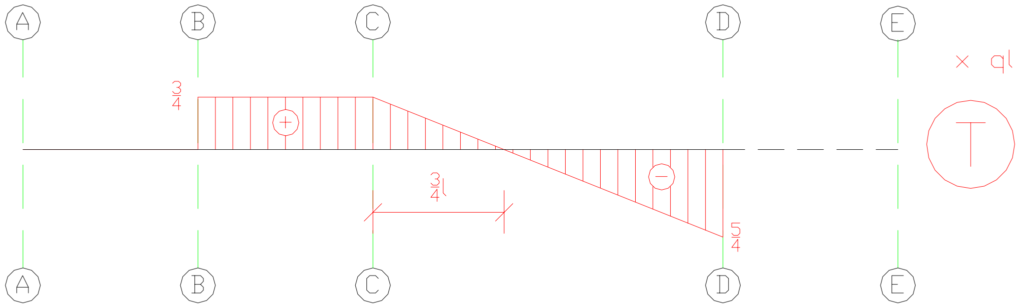


Pomiędzy punktami C i D działa do dołu obciążenie równomiernie rozłożone o wartości q, czyli na odcinku C-D wartość funkcji T zmniejsza się liniowo, w sumie o wypadkową obciążenia, czyli $2ql$.

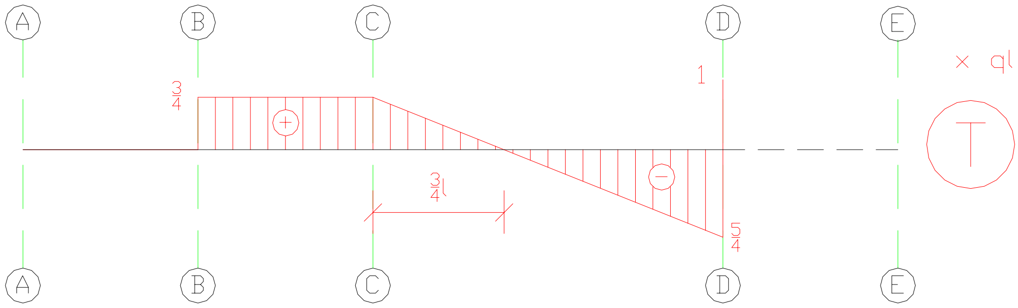


Jak widać wykres T zeruje się w punkcie odległym o x od C. Wartość x łatwo policzymy z proporcji:

$$\frac{\frac{3}{4}ql}{\frac{3}{4}ql + \frac{5}{4}ql} = \frac{x}{2l} \Rightarrow x = 2 \cdot \frac{3}{8}l \Rightarrow x = \frac{3}{4}l$$



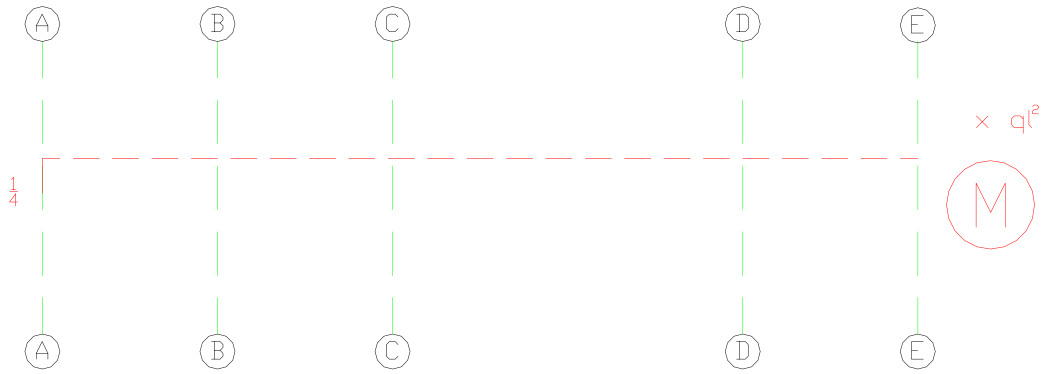
W punkcie D występuje siła poprzeczna, której składowa pionowa wywołuje obrót rozważanej (lewej) części układu zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara i ma wartość $\frac{9}{4}ql$. Wynika z tego skokowe zwiększenie siły *T* o $\frac{9}{4}ql$.



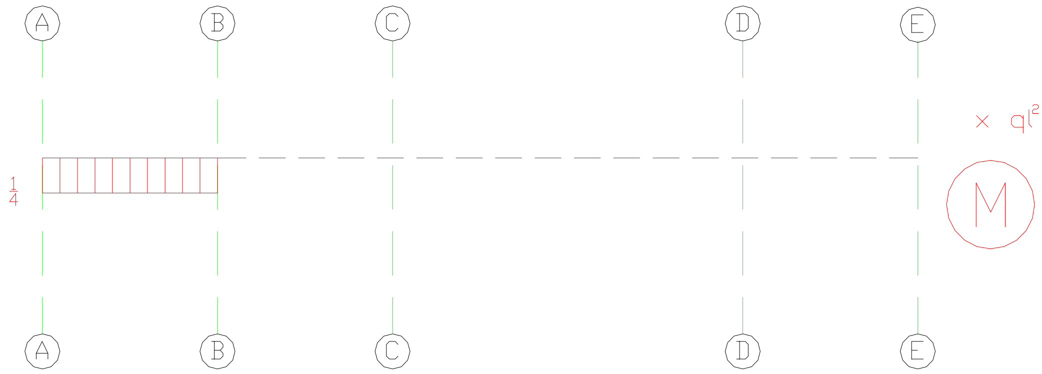
Na odcinku D-E działa obciążenie równomiernie rozłożone, czyli wykres *T* musi zmieniać się liniowo aż do zera w punkcie E (gdyż jest to nie obciążony siłą skupioną koniec belki). Tak więc ostatecznie wykres siły *T* ma postać:

Wykres momentu zginającego *M*

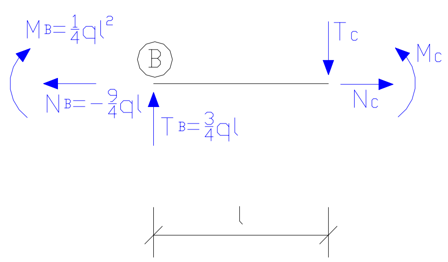
Zaczynamy od punktu A. W punkcie tym działa skupiony moment o wartości $\frac{ql^2}{4}$ rozciągający dolne włókna belki.



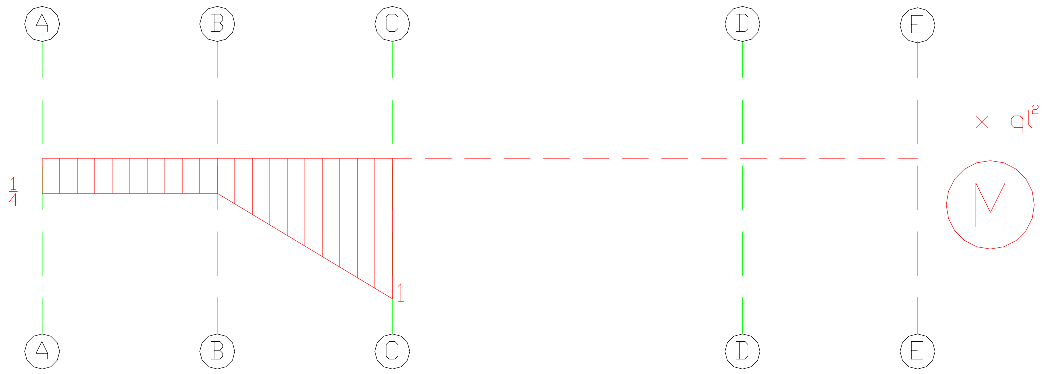
Na odcinku A-B siła *T=0*, więc funkcja *M* jest stała.



Na odcinku B-C wykres *T* jest stały, więc wykres *M* musi być liniowo zmienny. Wartość momentu zginającego po lewej stronie punktu C ustalimy rozpatrując równowagę następującego układu:



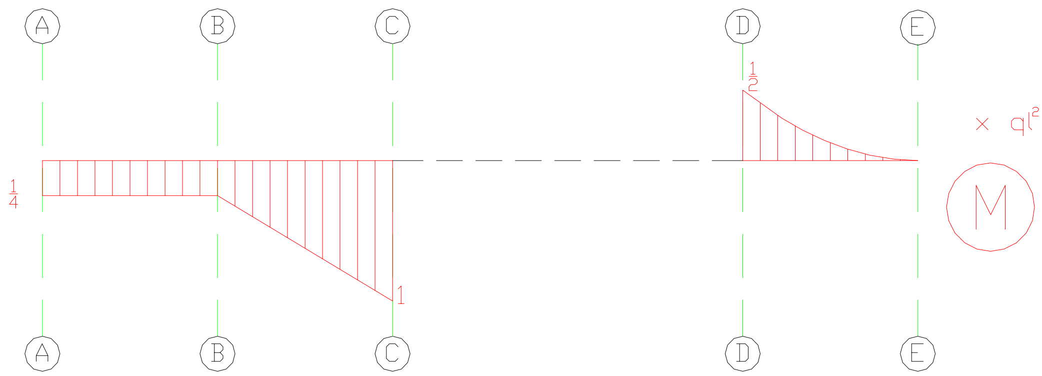
$$M_C^l = M_B + T_B \cdot l = \frac{1}{4}ql^2 + \frac{3}{4}ql^2 = ql^2 .$$



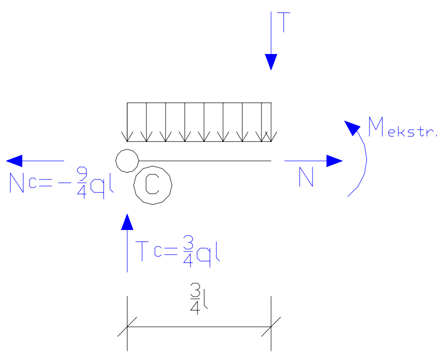
Z prawej strony przegubu w punkcie C moment skupiony nie występuje, więc $M_C^p = 0$. Na odcinkach C-D, oraz D-E wykres M jest parabolą wygiętą do dołu, gdyż na tych odcinkach działa obciążenie poprzeczne równomiernie rozłożone i skierowane do dołu. W punkcie E oczywiście $M = 0$, gdyż jest to nieobciążony momentem skupionym koniec belki. Moment w punkcie D można policzyć rozpatrując równowagę odcinka D-E.

$$|M_D| = ql \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} ql^2$$

Moment ten rozciąga włókna górne.

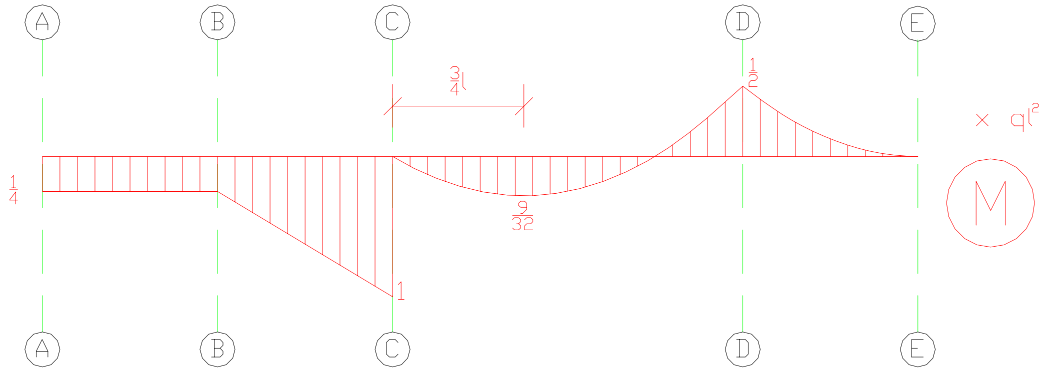


Pozostaje nam narysowanie wykresu pomiędzy punktami C i D. Wiemy, że wykresem na tym odcinku jest parabola, wiemy również, że w punkcie o $\frac{3}{4}l$ odległym od C występuje ekstremum lokalne funkcji *M*. Wartość momentu w tym punkcie obliczymy rozpatrując równowagę fragmentu



$$M_{ekstr.} = \frac{3}{4}ql \cdot \frac{3}{4}l - q \cdot \frac{3}{4}l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}l = \left(\frac{9}{16} - \frac{9}{32}\right)ql^2$$

Tak więc ostatecznie wykres *M* ma postać:



Dla ukazania zależności pomiędzy geometrią, sposobem podparcia i obciążenia belki oraz wykresami sił przekrojowych umieszczony został poniżej rysunek zbiorczy