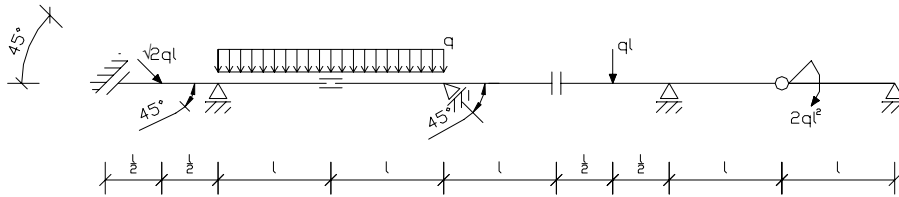


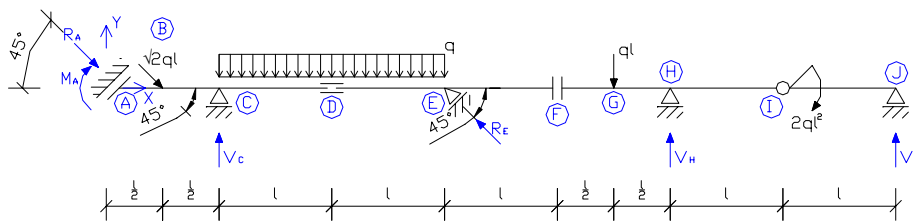
## Przykład 7.6. Belka wieloprzęslowa

Narysować wykresy sił wewnętrznych dla poniższej belki.

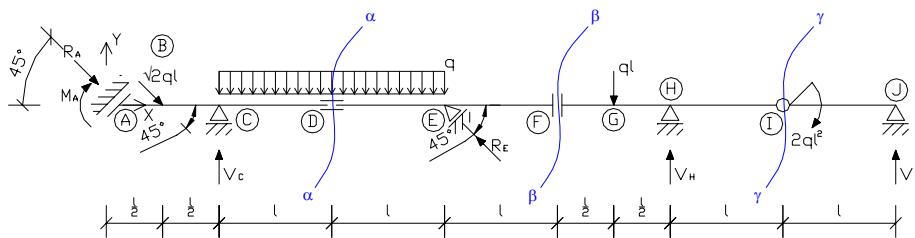


### Rozwiązanie

Rozwiązywanie zadania rozpoczynamy od oznaczenia punktów charakterystycznych, składowych reakcji i przyjęcia układu współrzędnych.



Poszczególne przęty belki połączone są tuleją, teleskopem i przegubem. Każde z tych połączeń daje nam dodatkowe równanie równowagi, które wykorzystamy przy obliczaniu reakcji.



$$\sum P_x^{\alpha-\alpha, l} = 0 \Leftrightarrow R_A \cdot \cos 45^\circ + \sqrt{2}ql \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow \underline{R_A = -\sqrt{2}ql}$$

$$\sum P_x^{\alpha-\alpha, p} = 0 \Leftrightarrow R_E \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow \underline{R_E = 0}$$

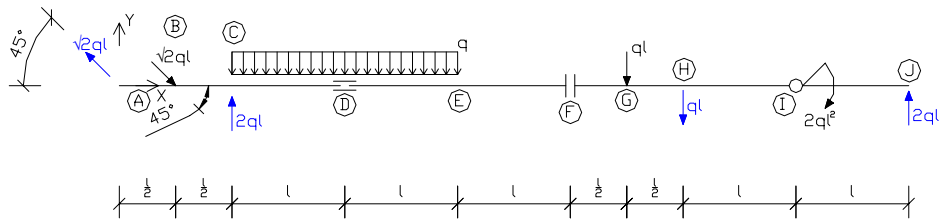
$$\begin{aligned} \sum P_y^{\beta-\beta, l} = 0 &\Leftrightarrow -R_A \cdot \sin 45^\circ - \sqrt{2}ql \cdot \sin 45^\circ + V_C - q \cdot 2l + R_E \cdot \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow V_C = -\sqrt{2}ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2ql \Rightarrow \underline{V_C = 2ql} \end{aligned}$$

$$\sum M_i^{\gamma-\gamma, p} = 0 \Leftrightarrow 2ql^2 - V_J \cdot l = 0 \Rightarrow \underline{V_J = 2ql}$$

$$\sum P_y^{\beta-\beta, p} = 0 \Leftrightarrow -ql + V_H + V_J = 0 \Rightarrow V_H = ql - 2ql \Rightarrow \underline{V_H = -ql}$$

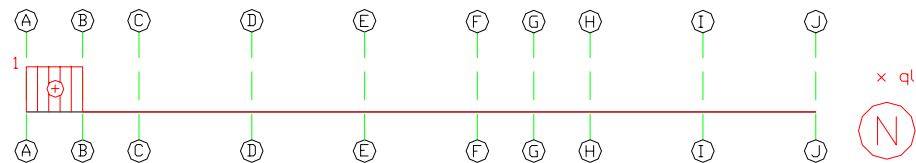
$$\begin{aligned} \sum M_i^{y-z,l} = 0 &\Leftrightarrow M_A - R_A \cdot \sin 45^\circ \cdot 6l - \sqrt{2}ql \cdot \sin 45^\circ \cdot \frac{11}{2}l + V_C \cdot 5l - q \cdot 2l \cdot 4l + R_E \cdot \sin 45^\circ \cdot 3l + \\ &- ql \cdot \frac{3}{2}l + V_H \cdot l = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow M_A &= -\sqrt{2}ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 6l + \frac{11\sqrt{2}}{2}ql^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 2ql \cdot 5l + 8ql^2 + \frac{3}{2}ql^2 - (-ql) \cdot l \Rightarrow \\ \Rightarrow M_A &= -6ql^2 + \frac{11}{2}ql^2 - 10ql^2 + \frac{19}{2}ql^2 + ql^2 \Rightarrow M_A = -16ql^2 + 16ql^2 \Rightarrow \underline{M_A = 0} \end{aligned}$$

Możemy więc narysować wszystkie obciążenia działające na belkę.



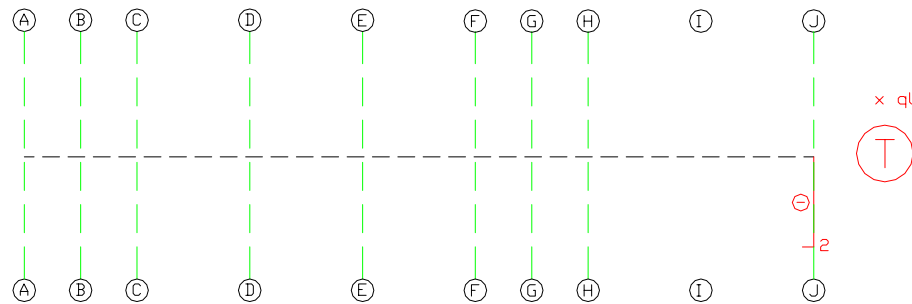
### Wykres siły normalnej $N$

Jedynymi obciążeniami działającymi wzdłuż osi belki są składowe poziome sił skupionych przyłożonych w punktach A i B. Działają one w kierunku „od belki”, co oznacza, że siła normalna na odcinku A-B wynosi  $+\sqrt{2}ql \cdot \sin 45^\circ = +\sqrt{2}ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = +ql$ . Na pozostałej części belki siła  $N$  jest równa zero.

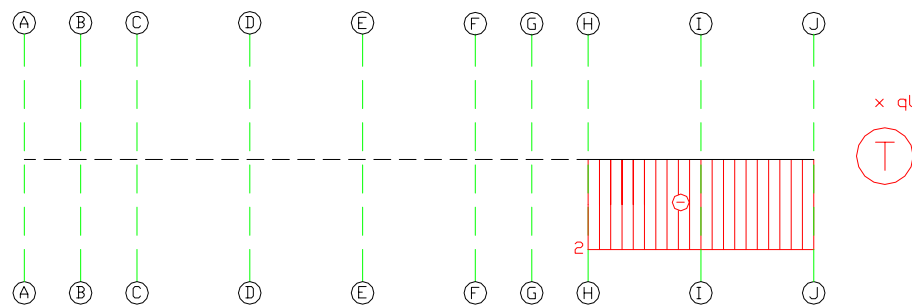


## Wykres siły poprzecznej $T$

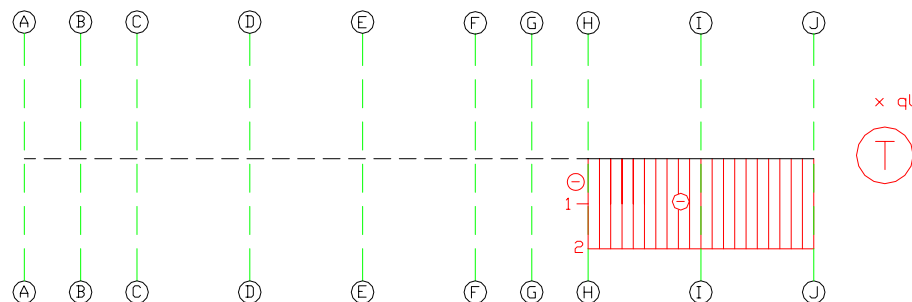
Analizę sił tnących zaczynamy od prawego końca belki, tj. punktu J. W punkcie tym przyłożona jest siła poprzeczna skupiona o wartości  $2ql$ . Ponieważ siła ta powoduje obrót rozpatrywanej, prawej części belki w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, więc siła tnąca na końcu belki wynosi  $-2ql$ .



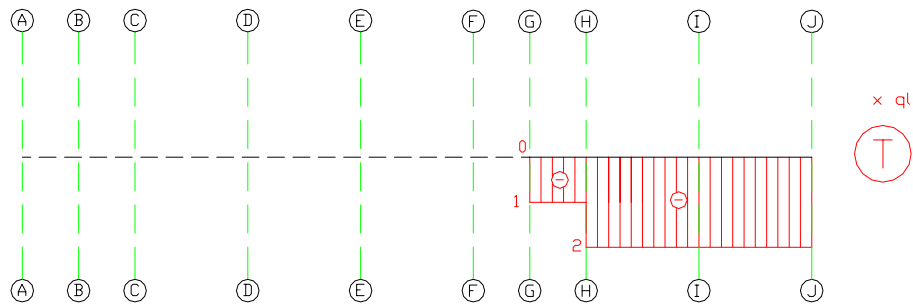
Na odcinku J-H siły poprzeczne nie występują, więc wartość  $T$  się nie zmienia.



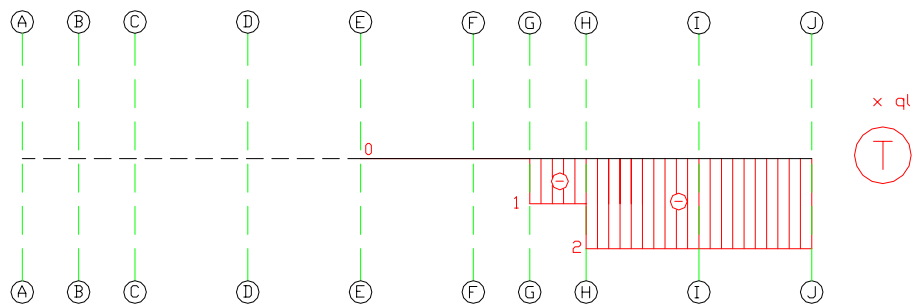
Przyłożona w punkcie H siła  $ql$  powoduje obrót rozpatrywanej, prawej części belki w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, a więc tym razem występuje skok wartości zwiększający siłę  $T$  o  $ql$ .



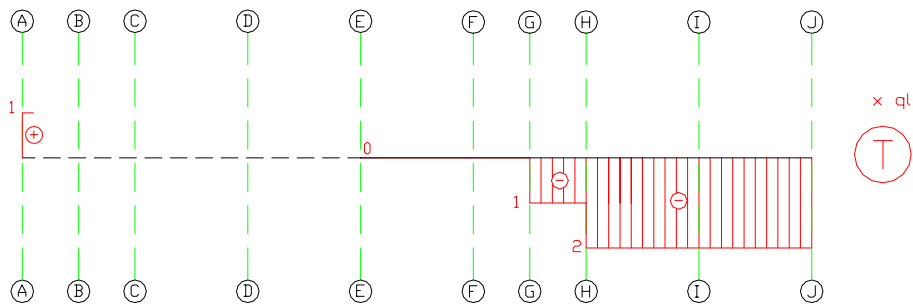
Na odcinku od H do G siła  $T$  nie ulegnie zmianie (bo nie występują tam obciążenia poprzeczne), zaś w punkcie G działa siła identyczna jak w punkcie H, więc i efekt jej działania na wartość siły tnącej będzie identyczny – skokowe zwiększenie  $T$  o  $ql$ .



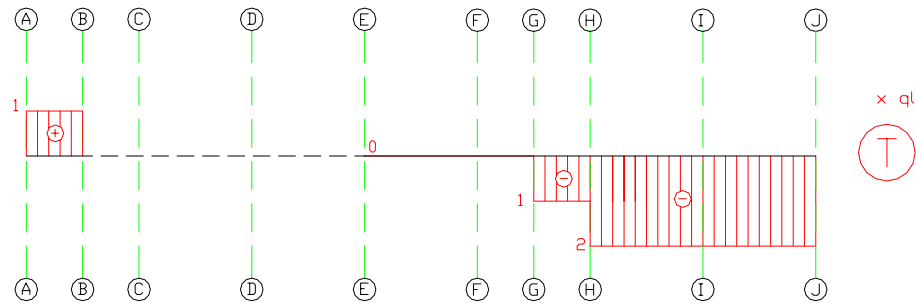
Pomiędzy punktami G i E nie działają żadne obciążenia, co skutkuje niezmiennością wartości  $T$ .



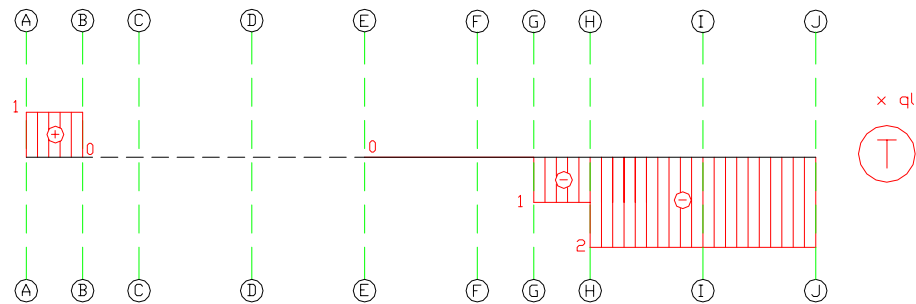
Rozpatrzmy teraz lewy kraniec belki. Działająca w punkcie A siła skupiona ma składową pionową o wartości  $\sqrt{2}ql \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{2}ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = ql$ , powodującą obrót lewej części belki w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Oznacza to, że w punkcie A siła  $T$  ma wartość  $+ql$ .



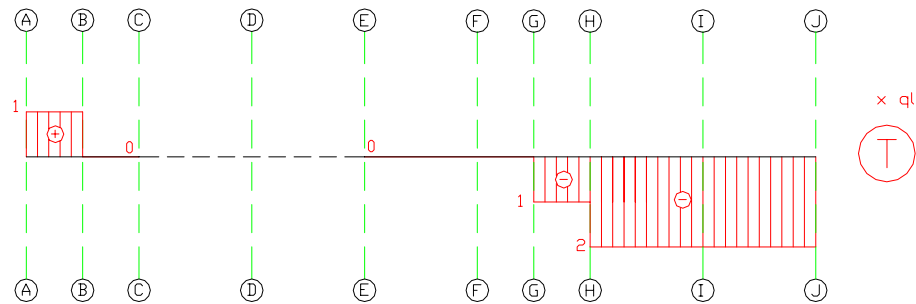
Pomiędzy punktami A i B wartość  $T$ , z powodu braku obciążenia, się nie zmienia.



Siła działająca w punkcie B ma identyczną wielkość i kierunek oraz przeciwny zwrot w porównaniu z siłą z punktu A. Efekt jej działania jest więc odwrotny – zmniejsza wartość siły tnącej o  $ql$ .

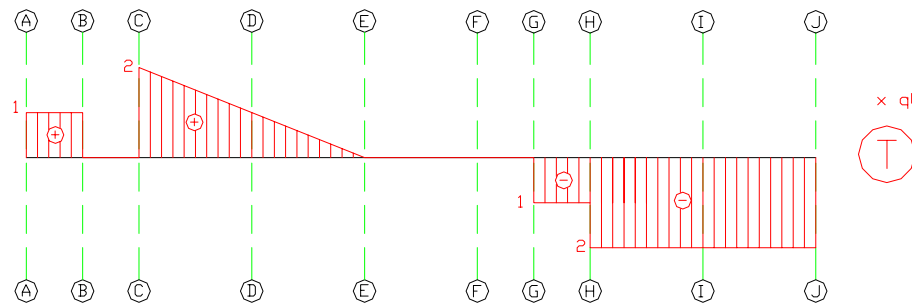


Na odcinku B-C wartość  $T$ , z powodu braku obciążenia, się nie zmienia.



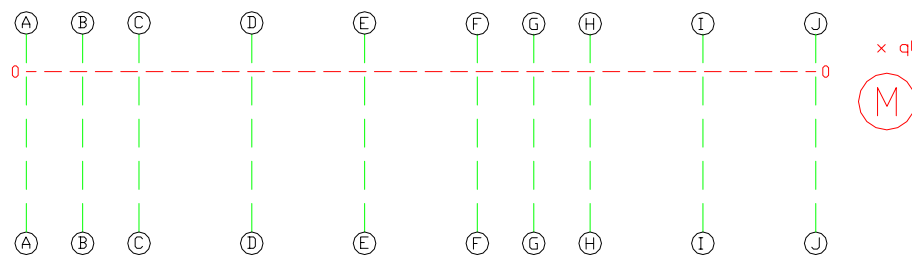
Siła skupiona przyłożona w punkcie C o wartości  $2ql$  wymusza istnienie skokowej zmiany wartości  $T$  o  $2ql$ . Ponieważ siła ta powoduje obrót lewej części belki w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, więc zmiana wartości  $T$  polega na jej zwiększeniu.

Na odcinku C-E działa obciążenie poprzeczne, równomiernie rozłożone, czyli wartość siły tnącej zmienia się na tym odcinku liniowo pomiędzy  $2ql$  w punkcie C i  $0$  w punkcie E. Spostrzeżenie to pozwala nam skończyć rysowanie wykresu  $T$ .



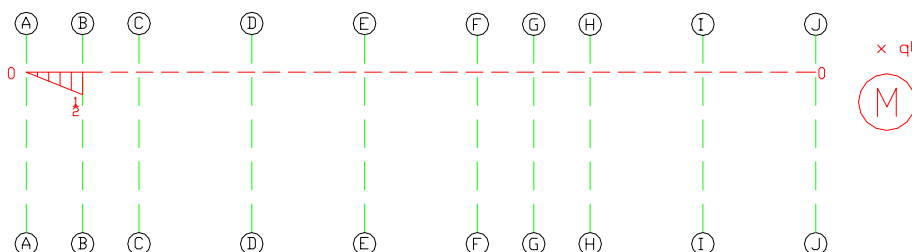
### Wykres momentu zginającego $M$

Na obu końcach belki nie występują momenty skupione, co oznacza, że zarówno w punkcie A, jak i J  $M=0$ .

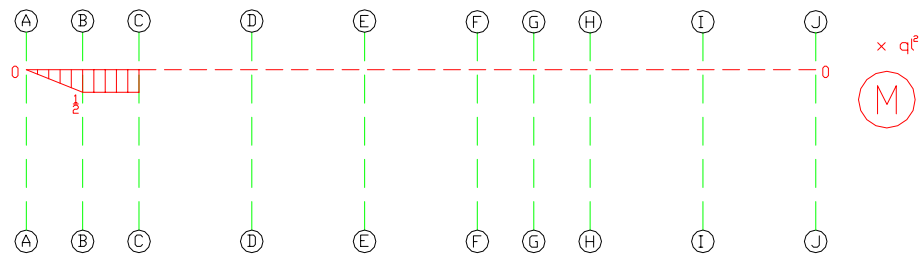


Na odcinku A-B wykres  $T$  jest stały, więc wykres  $M$  musi być zmienny liniowo. W punkcie B moment zginający rozciąga włókna dolne i ma wartość:

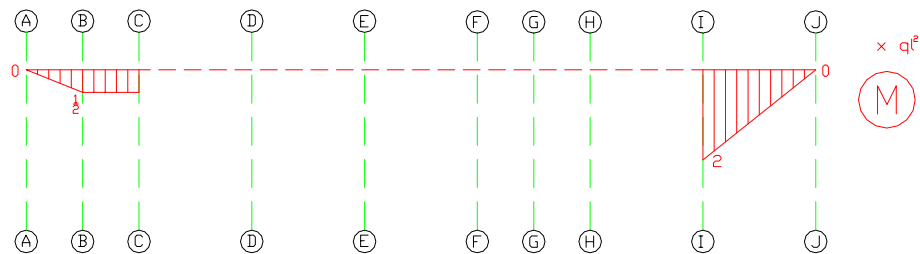
$$\sqrt{2}ql \cdot \sin 45^\circ \cdot \frac{l}{2} = \sqrt{2}ql \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{l}{2} = \frac{ql^2}{2}$$



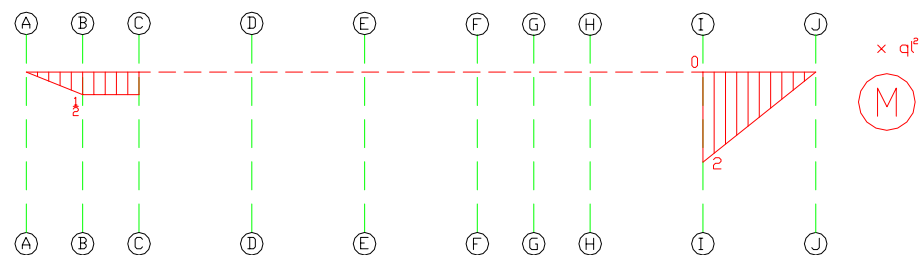
Na odcinku B-C siła tnąca jest równa zero, więc wartość momentu się nie zmienia.



Zajmiemy się teraz prawą częścią wykresu. Na odcinku J-I  $T=const.$ , więc wykres  $M$  jest zmienny liniowo od zera w punkcie J do momentu równego  $2ql \cdot l = 2ql^2$  i rozciągającego włókna dolne w punkcie I.

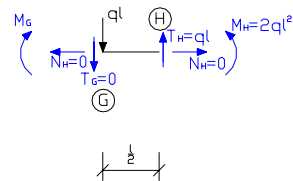


W punkcie I przyłożony jest skupiony moment o wartości  $2ql^2$  rozciągający włókna górne dla przekroju po lewej stronie przegubu - oznacza to skokową zmianę wartości funkcji  $M$  z  $+2ql^2$  („+” oznacza rozciąganie włókien dolnych) po prawej stronie punktu I do zera po stronie lewej.



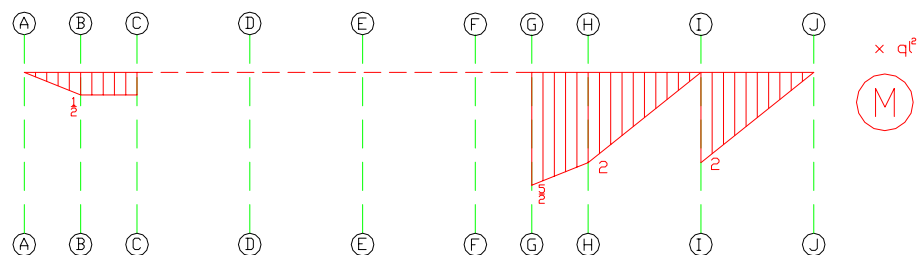
Na odcinku I-H siła tnąca ma wartość stałą, taką samą, jak na odcinku J-I, co powoduje, że wykres  $M$  pomiędzy I, a H jest zmienny liniowo i na takie samo nachylenie, jak na odcinku J-I.

Na odcinku H-G siła tnąca nadal ma wartość stałą, czyli wykres  $M$  jest również liniowo zmienny. Wartość momentu w punkcie G policzymy rozpatrując równowagę następującego układu:

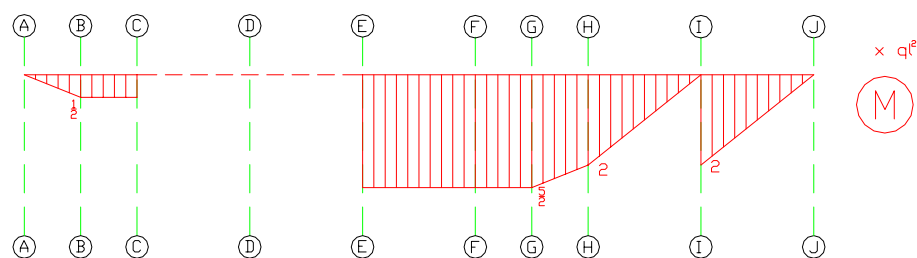


Stąd:

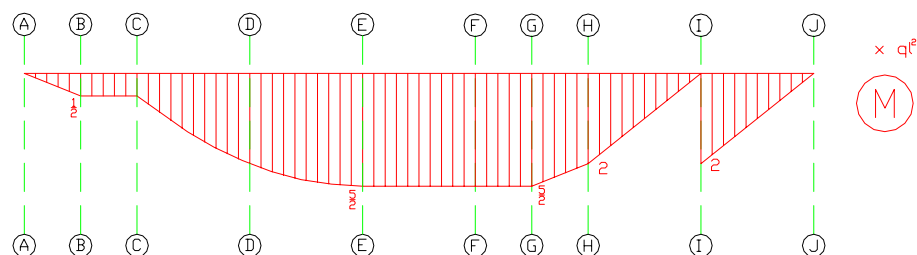
$$M_G = T_H \cdot l + M_H = ql \cdot \frac{l}{2} + 2ql^2 = \frac{5}{2}ql^2$$



Pomiędzy punktami G i E siła tnąca ma wartość stałą, czyli wartość  $M$  się nie zmienia.



Pozostaje nam rozpatrzyć odcinek C-E. Ponieważ wykres siły tnącej jest na nim liniowo zmienny, więc wykres  $M$  musi być parabolą. Wykres  $T$  nie zmienia znaku, czyli funkcja  $M$  nie posiada ekstremum lokalnego. Ponieważ obciążenie rozłożone na tym odcinku działa do dołu, więc i wykres  $M$  jest wygięty ku dołowi. Dodatkowo brak zmiany wartości funkcji  $T$  w punkcie E oznacza, że funkcja  $M$  jest w tym punkcie gładka, czyli styczne do wykresu momentu zginającego po obu stronach przekroju mają to samo nachylenie.





Dla ukazania zależności pomiędzy geometrią, sposobem podparcia i obciążenia belki oraz wykresami sił przekrojowych umieszczony został poniżej rysunek zbiorczy.

