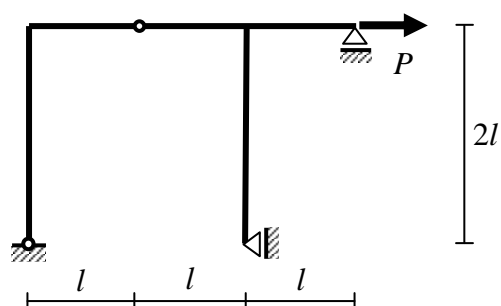


Wykaz zadań

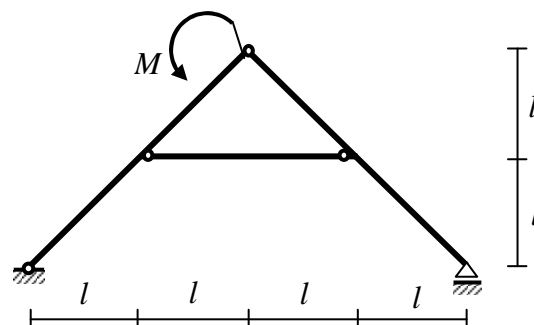
Zaprezentowanie w niniejszym „Wykazie...” rozwiązanych w rozdziale 8 zadań ma na celu umożliwienie Czytelnikowi szybkiego wyboru przykładu, którym jest zainteresowany. Czytelnika początkującego zachęca się do analizowania przykładów zgodnie z zaproponowaną kolejnością. Byłoby również korzystne zapoznanie się z „Wprowadzeniem” (znajdującym się po „Wykazie zadań”) ze względu na zawarte w nim informacje wykorzystywane w rozwiązywanych zadaniach.

W przykładach od 8.1. do 8.3. polecenie obejmuje wyznaczenie funkcji sił przekrojowych oraz wykresów tych funkcji, natomiast w pozostałych (od 8.4. do 8.8.) ograniczone jest do sporządzenia wykresów sił przekrojowych. W tytułach zadań (od 8.5. do 8.7) obciążonych obciążeniem ciągłym pojawia się określenie: typ I, typ II lub typ III. Wyjaśnienie tych określeń znajduje się we „Wprowadzeniu”.

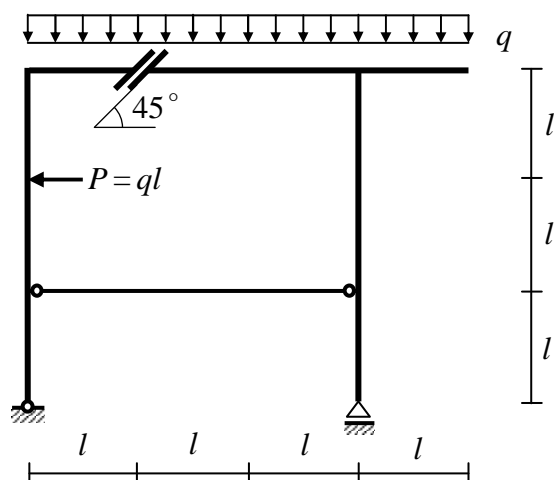
Przykład 8.1.



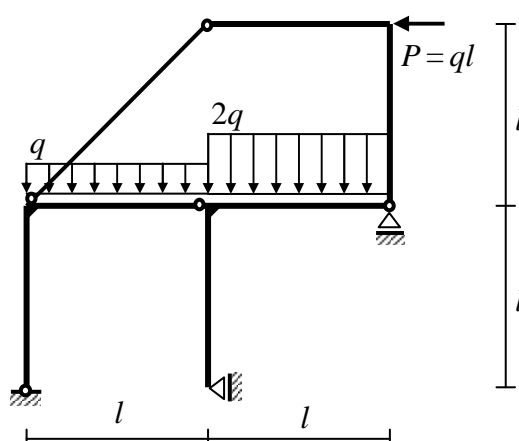
Przykład 8.2.



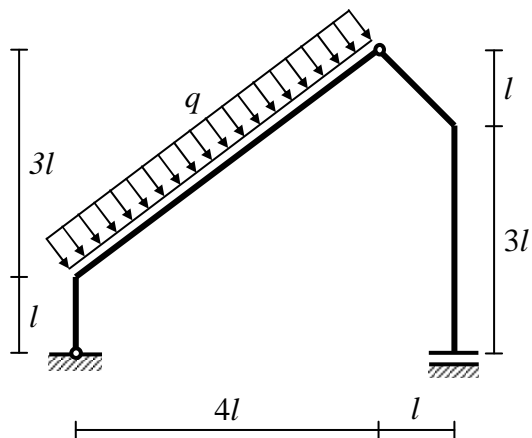
Przykład 8.3.



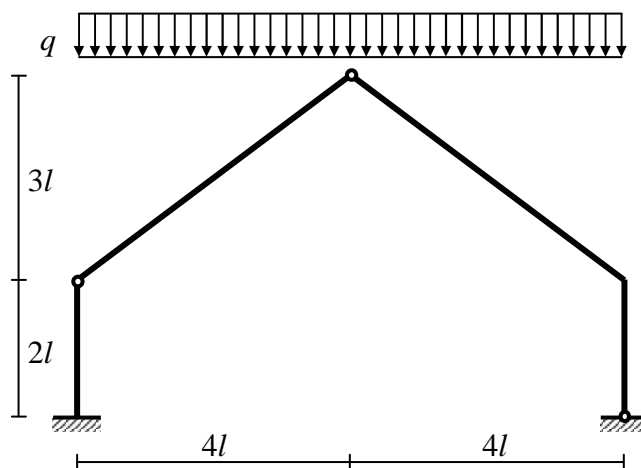
Przykład 8.4.



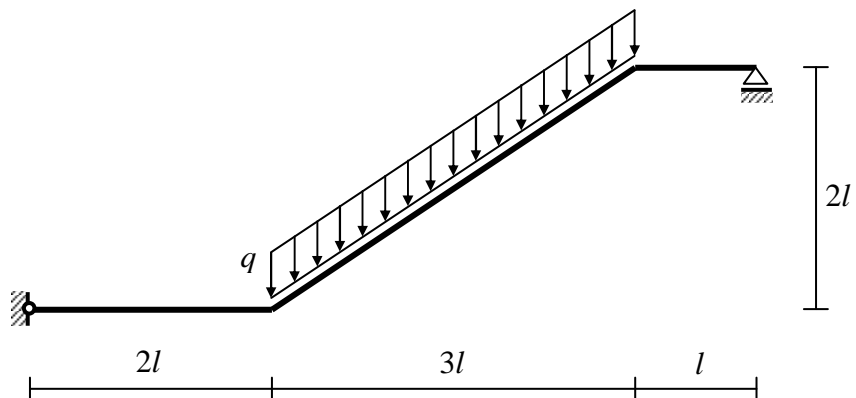
Przykład 8.5.



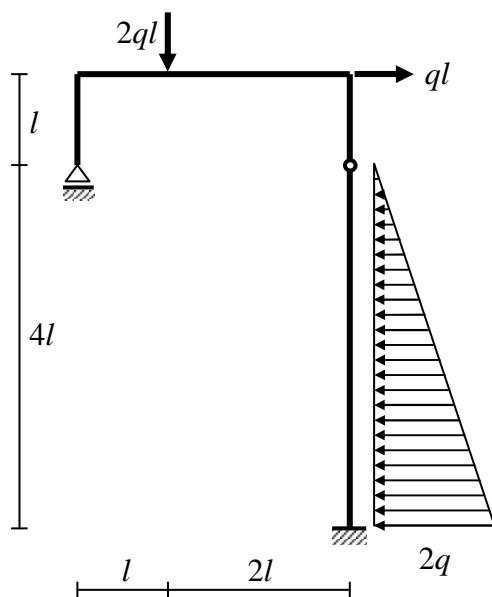
Przykład 8.6.



Przykład 8.7.



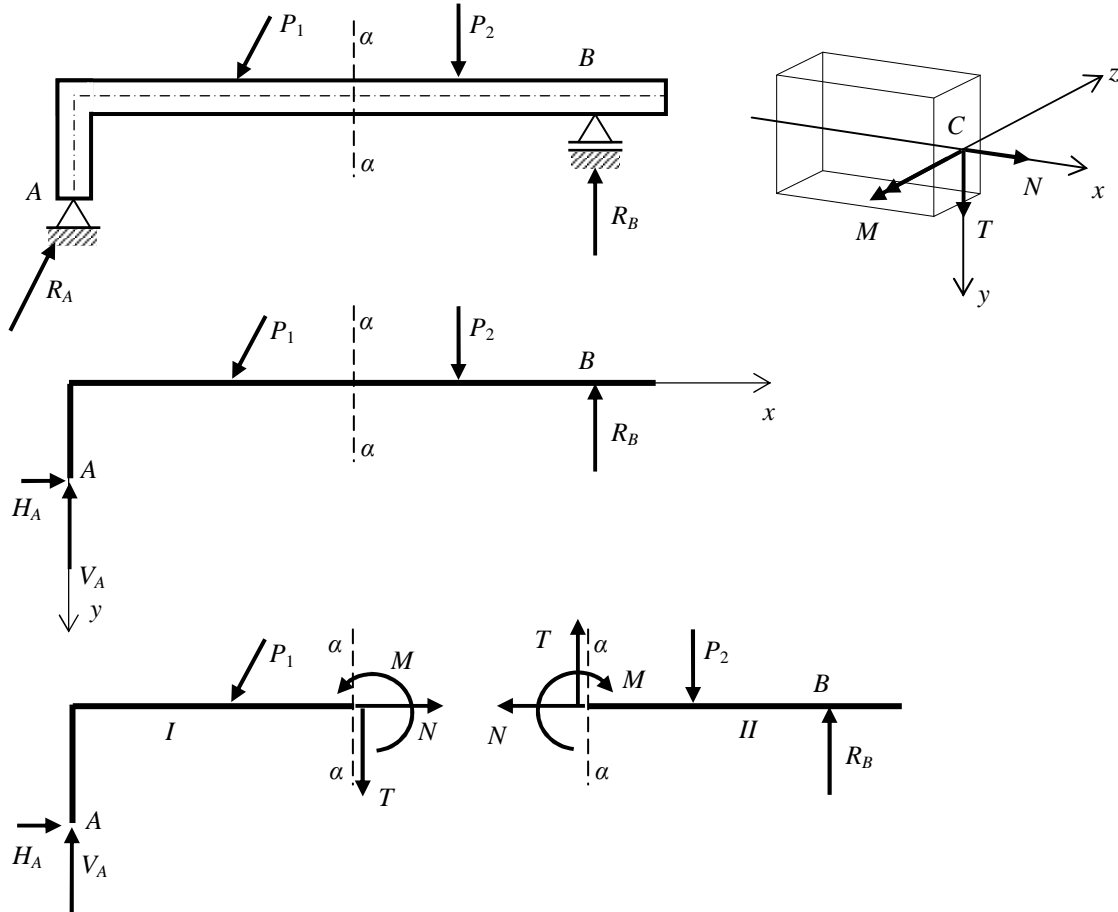
Przykład 8.8.



Wprowadzenie

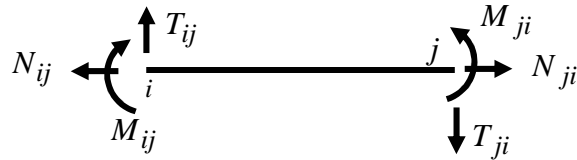
Siły przekrojowe w ramach płaskich

Obciążenie zewnętrzne ramy płaskiej działa w płaszczyźnie xy , w której leżą również osie wszystkich prętów rozważanego układu. W takim przypadku w przekroju poprzecznym (prostopadłym do osi pręta) działają jedynie siła normalna N_x , siła tnąca T_y oraz moment gnący M_z , które oznaczają będziemy przez N , T i M .



Siłę normalną N uważamy za dodatnią, jeżeli ma zwrot siły rozciągającej, czyli ma zwrot na zewnątrz od przekroju poprzecznego. Siłę tnącą T uważamy za dodatnią, jeżeli jej zwrot jest taki, jakby „dążyła” do obrócenia odciętej przekrojem części ramy zgodnie z ruchem wskazówek zegara. W układach belkowych przyjmuje się, że moment gnący M dodatni powoduje rozciąganie dolnych włókien. W przypadku płaskich układów ramowych mamy do czynienia nie tylko z prętami o osiach poziomych (np. rygle), ale również z prętami o osiach pionowych (np. słupki) oraz z prętami o osiach ukośnych. Tym samym zasada, że moment gnący M dodatni powoduje rozciąganie włókien dolnych, nie może być stosowana w każdym przedziale ramy płaskiej. Rzędne wykresu momentu gnącego będą rysowane po stronie włókien rozciąganych. Szczegółowo ten problem omówiony zostanie w rozwiązaniach kolejnych przykładów.

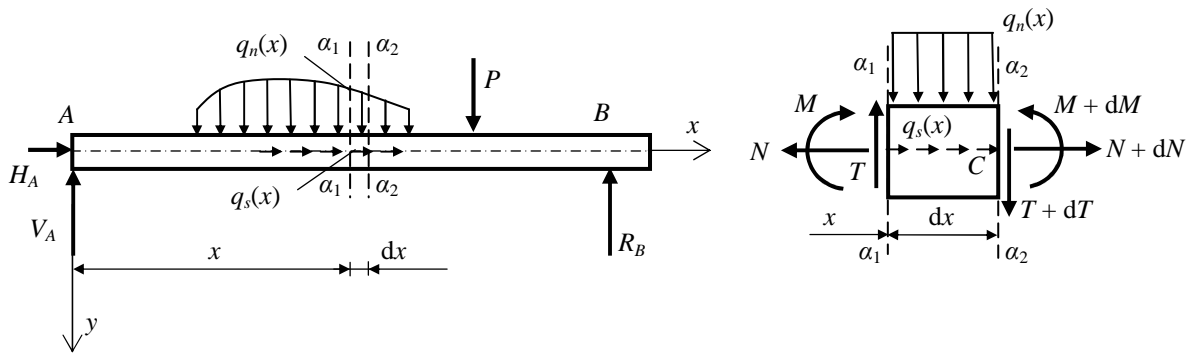
W ogólnym przypadku wartości sił przekrojowych będą się zmieniać wzdłuż osi x , a więc będą opisane funkcjami odciętej x , określającej położenie danego przekroju. W celu jednoznacznego i precyzyjnego określenia przekrojów oraz działających w nich sił przekrojowych w odniesieniu do poszczególnych prętów (przedziałów) przyjmujemy oznaczenia zgodnie z poniższym rysunkiem.



Pierwszy indeks oznacza, w którym przekroju działają siły przekrojowe, natomiast oba indeksy wskazują rozpatrywany pręt (przedział). Na powyższym rysunku siły mają zwroty dodatnich sił normalnych i tnących. Oznaczenia te stosowane będą niezależnie od działania obciążenia zewnętrznego lub jego braku w analizowanym przedziale.

Zależności różniczkowe między siłami przekrojowymi i obciążeniem ciągłym pręta o osi prostej

W belce lub pręcie ramy płaskiej dwoma przekrojami $\alpha_1 - \alpha_1$ i $\alpha_2 - \alpha_2$, znajdującymi się nieskończenie blisko siebie, wycinamy element pręta o długości dx na dowolnym odcinku, na którym nie działa obciążenie skupione. Obciążenie ciągłe $q_n(x)$ i $q_s(x)$ działające na długości dx możemy traktować jako rozłożone równomiernie.



Zapisujemy równania równowagi dla elementu pręta o długości dx :

$$\sum P_{ix} = 0 \quad -N + q_s(x)dx + (N + dN) = 0$$

$$\sum P_{iy} = 0 \quad -T + q_n(x)dx + (T + dT) = 0$$

$$\sum M_{iC} = 0 \quad -M + q_n(x)dx \frac{1}{2} dx - T dx + (M + dM) = 0$$

Po odrzuceniu wielkości nieskończenie małych drugiego rzędu otrzymujemy:

$$\frac{dN}{dx} = -q_s(x) \quad \frac{dT}{dx} = -q_n(x) \quad \text{oraz} \quad \frac{dM}{dx} = T(x)$$

Z zależności tych korzystamy sprawdzając poprawność wyznaczonych funkcji sił przekrojowych oraz wykresów sił przekrojowych w przypadku prętów o osi prostej. Możemy również po przekształceniu tych zależności wyprowadzić wzory na funkcje $N(x)$, $T(x)$ i $M(x)$ w przedziale $x \in \langle x_0, x_k \rangle$.

$$\frac{dN}{dx} = -q_s(x) \Rightarrow dN = -q_s(x)dx \Rightarrow \int_{x_0}^{x_k} dN = - \int_{x_0}^{x_k} q_s(x)dx \Rightarrow N|_{x_0}^{x_k} = - \int_{x_0}^{x_k} q_s(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(x_k) - N(x_0) = - \int_{x_0}^{x_k} q_s(x)dx \Rightarrow \underline{N(x_k) = N(x_0) - \int_{x_0}^{x_k} q_s(x)dx}$$

$$\frac{dT}{dx} = -q_n(x) \Rightarrow dT = -q_n(x)dx \Rightarrow \int_{x_0}^{x_k} dT = - \int_{x_0}^{x_k} q_n(x)dx \Rightarrow T|_{x_0}^{x_k} = - \int_{x_0}^{x_k} q_n(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x_k) - T(x_0) = - \int_{x_0}^{x_k} q_n(x)dx \Rightarrow \underline{T(x_k) = T(x_0) - \int_{x_0}^{x_k} q_n(x)dx}$$

$$\frac{dM}{dx} = T(x) \Rightarrow dM = T(x)dx \Rightarrow \int_{x_0}^{x_k} dM = \int_{x_0}^{x_k} T(x)dx \Rightarrow M|_{x_0}^{x_k} = \int_{x_0}^{x_k} T(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(x_k) - M(x_0) = \int_{x_0}^{x_k} T(x)dx \Rightarrow \underline{M(x_k) = M(x_0) + \int_{x_0}^{x_k} T(x)dx}$$

Całka $\int_{x_0}^{x_k} q_s(x)dx$ jest wypadkową obciążenia stycznego $q_s(x)$ działającego w przedziale $x \in \langle x_0, x_k \rangle$. Obciążenie styczne $q_s(x)$ ma kierunek osi pręta. Wartość tego obciążenia jest dodatnia, gdy jego zwrot jest zgodny ze zwrotem osi x .

Całka $\int_{x_0}^{x_k} q_n(x)dx$ jest wypadkową obciążenia normalnego $q_n(x)$ działającego w przedziale $x \in \langle x_0, x_k \rangle$. Obciążenie normalne $q_n(x)$ ma kierunek prostopadły do osi pręta. Wartość tego obciążenia jest dodatnia, gdy jego zwrot jest zgodny ze zwrotem osi y .

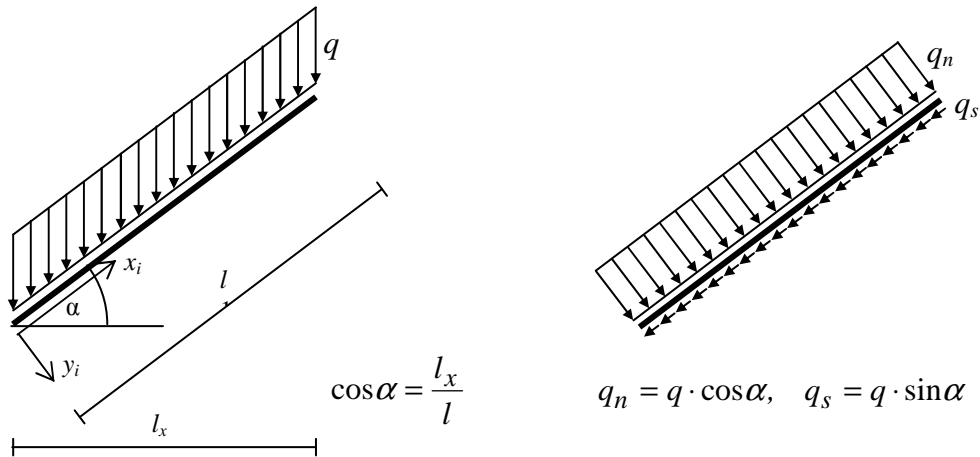
Całkę $\int_{x_0}^{x_k} T(x)dx$ w przedziale $x \in \langle x_0, x_k \rangle$ możemy wyznaczyć korzystając z definicji całki oznaczonej, jako pole pod wykresem siły tnącej w tym przedziale.

Przykłady obciążeń ciągłych

Przykładem obciążenia ciągłego może być między innymi obciążenie ciężarem własnym konstrukcji (typ I), śniegiem (typ II), wiatrem (typ III) lub obciążenie użytkowe. Określenia typ I, II i III wprowadzono wyłącznie na potrzeby opisu zadań z niniejszego rozdziału.

Obciążenie ciężarem własnym konstrukcji (typ I)

Obciążenie ciężarem własnym konstrukcji zadane jest na jednostkę długości pręta i ma kierunek pionowy. Możemy je zastąpić obciążeniem równoważnym, złożonym z obciążenia normalnego q_n i stycznego q_s . Długość l_x jest rzutem długości pręta l na kierunek poziomy, to jest prostopadły do kierunku obciążenia q .



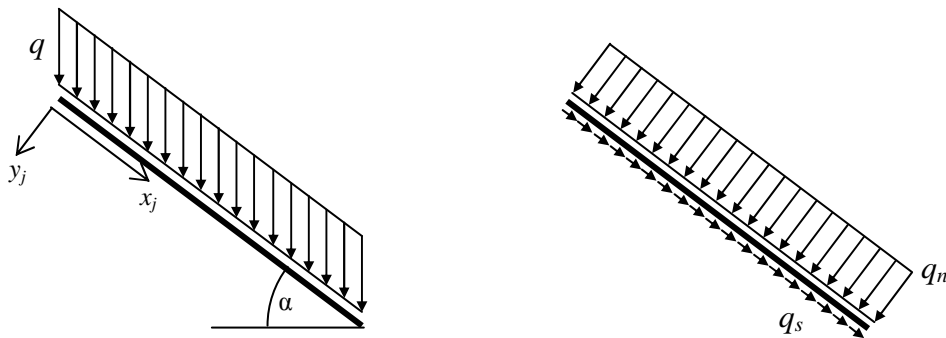
$$W = q \cdot l, \quad W_n = q_n \cdot l, \quad W_s = q_s \cdot l$$

$$\vec{W} = \vec{q} \cdot l, \quad \vec{W}_n = \vec{q}_n \cdot l, \quad \vec{W}_s = \vec{q}_s \cdot l$$

$$\vec{W} = \vec{W}_n + \vec{W}_s$$

Układ $x_i y_i$ jest układem lokalnym. Zwrot obciążenia normalnego q_n jest zgodny ze zwrotem osi y_i , a więc w zależności różniczkowej obciążenie to traktujemy jako $q_n > 0$. Z kolei zwrot obciążenia stycznego q_s jest przeciwny do zwrotu osi x_i , czyli w zależności różniczkowej obciążenie to traktujemy jako $q_s < 0$.

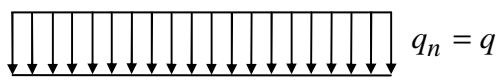
Dla poniższego przypadku zwroty q_n i q_s są zgodne ze zwrotami osi układu lokalnego $x_j y_j$. Oznacza to, że w rozważanym przedziale $q_n > 0$ i $q_s > 0$.



W szczególnych przypadkach nachylenia osi pręta do poziomu otrzymujemy:

dla pręta poziomego

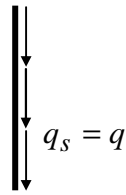
$$\alpha = 0^\circ, \quad \cos \alpha = 1, \quad \sin \alpha = 0$$



$$q_n = q \cdot \cos \alpha = q, \quad q_s = q \cdot \sin \alpha = 0$$

dla pręta pionowego

$$\alpha = 90^\circ, \cos \alpha = 0, \sin \alpha = 1$$

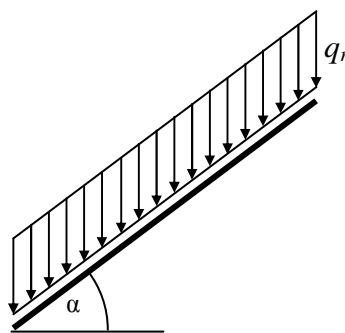
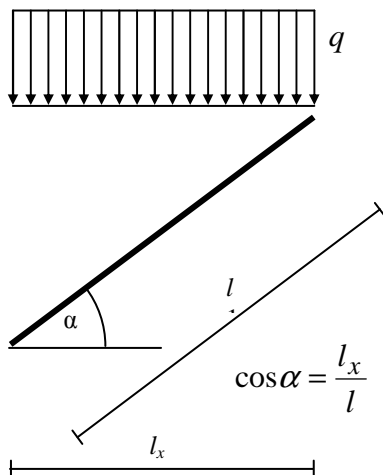


$$q_n = q \cdot \cos \alpha = 0, \quad q_s = q \cdot \sin \alpha = q$$

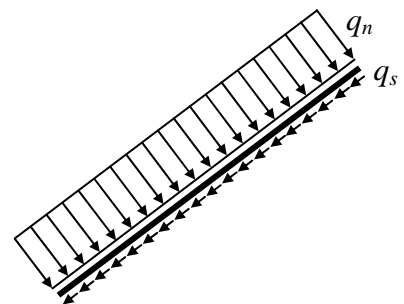
Obciążenie śniegiem (typ II)

Obciążenie śniegiem zadane jest na jednostkę rzutu długości pręta na kierunek poziomy. Obciążenie to ma kierunek pionowy. Możemy je zastąpić obciążeniem równoważnym q_r , które ma kierunek pionowy i wartość zadaną na jednostkę długości pręta. Z kolei obciążenie q_r zastępujemy obciążeniem normalnym q_n i stycznym q_s . Długość l_x jest rzutem długości pręta l na kierunek poziomy, to jest prostopadły do kierunku obciążenia q . Obciążenia q i q_r są równoważne w przypadku, gdy ich wypadkowe są sobie równe.

$$q \cdot l_x = q_r \cdot l \Rightarrow q \cdot l \cdot \cos \alpha = q_r \cdot l \Rightarrow q_r = q \cdot \cos \alpha$$



$$q_r = q \cdot \cos \alpha$$



$$q_n = q_r \cdot \cos \alpha, \quad q_s = q_r \cdot \sin \alpha$$

Związek między q_r i q podstawiamy do zależności, z których wyznaczamy wartość obciążenia normalnego i stycznego.

$$q_n = q_r \cdot \cos \alpha = q \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha = q \cos^2 \alpha, \quad q_s = q_r \cdot \sin \alpha = q \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = q \sin \alpha \cos \alpha$$

$$W = q \cdot l_x, \quad W_n = q_n \cdot l, \quad W_s = q_s \cdot l$$

$$\vec{W} = \vec{q} \cdot l_x, \quad \vec{W}_n = \vec{q}_n \cdot l, \quad \vec{W}_s = \vec{q}_s \cdot l$$

$$\vec{W} = \vec{W}_n + \vec{W}_s$$

Wcześniejsze uwagi dotyczące znaków wartości obciążenia normalnego q_n i stycznego q_s nie ulegają zmianie. Znaki te zależą od przyjętego układu lokalnego.

Obciążenie wiatrem (typ III)

Obciążenie wiatrem zadane jest na jednostkę długości pręta i ma kierunek prostopadły do jego osi. W przypadku konstrukcji obciążonej wiatrem możemy mieć do czynienia zarówno z parciem, jak i ssaniem wiatru. Zwrot obciążenia wiatrem na poszczególnych elementach konstrukcji ramy pokazuje poniższy rysunek. Ma on charakter poglądowy. Został wykonany przy założeniu, że kąt $\alpha \geq 30^\circ$. W przypadku kąta $\alpha < 30^\circ$ na obu połaciach dachu występuje ssanie. Dla kąta $\alpha \leq 15^\circ$ należy także uwzględnić obciążenie styczne, działające na konstrukcję dachu.

