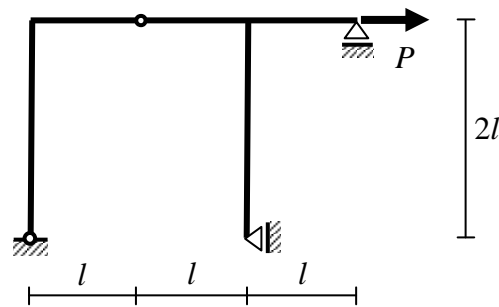
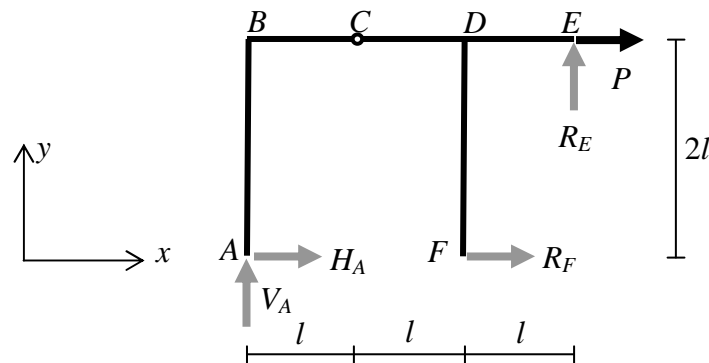


Przykład 8.1. Rama obciążona siłą skupioną

Polecenie: Dla poniższej ramy wyznaczyć funkcje sił przekrojowych oraz sporządzić ich wykresy.



Oznaczamy punkty charakterystyczne: podpory A , E i F , węzły sztywne B i D (połączenia rygla z prętami pionowymi) oraz połączenie przegubowe C . W układzie oswobodzonym od więzów podpory zastępujemy reakcjami. Wektory o nieznanymi wartościami oznaczamy szarym kolorem. Po wyznaczeniu ich wartości kolor zmieniamy na czarny.

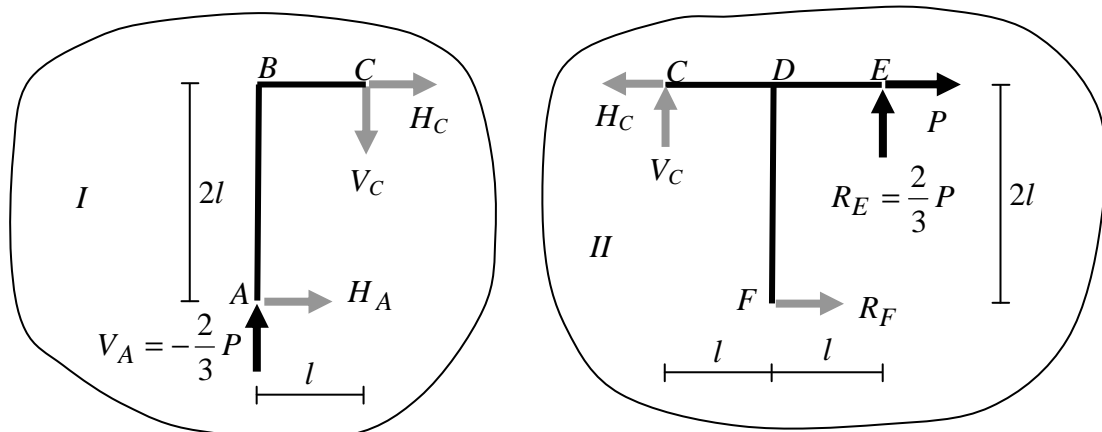


W równaniach równowagi momenty działające przeciwnie do ruchu wskazówek zegara opatrzone są znakiem dodatnim, natomiast działające zgodnie z ruchem wskazówek zegara znakiem ujemnym.

$$\sum_i M_{iA} = 0 \Leftrightarrow R_E \cdot 3l - P \cdot 2l = 0 \Rightarrow R_E = \frac{2}{3}P$$

$$\sum_i P_{iy} = 0 \Leftrightarrow V_A + R_E = 0 \Rightarrow V_A = -\frac{2}{3}P$$

W celu wyznaczenia składowej poziomej H_A oraz reakcji R_F dzielimy układ na podukłady I i II.



Z równania sumy momentów względem punktu C dla podukładu I wyznaczamy H_A .

$$\sum_i M_C^I = 0 \Leftrightarrow H_A \cdot 2l - V_A \cdot l = 0 \Rightarrow H_A = \frac{1}{2}V_A = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}P\right) = -\frac{1}{3}P$$

Z równania sumy momentów względem punktu C dla podukładu II wyznaczamy R_F .

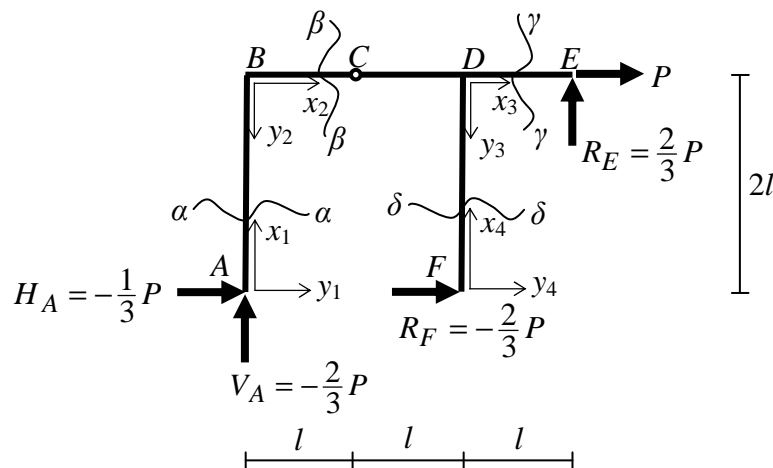
$$\sum_i M_C^{II} = 0 \Leftrightarrow R_F \cdot 2l + R_E \cdot 2l = 0 \Rightarrow R_F = -R_E = -\left(\frac{2}{3}P\right) = -\frac{2}{3}P$$

Sprawdzamy poprawność wartości wyznaczonych reakcji zapisując równanie rzutów sił na oś poziomą. Równanie to wcześniej nie było wykorzystane.

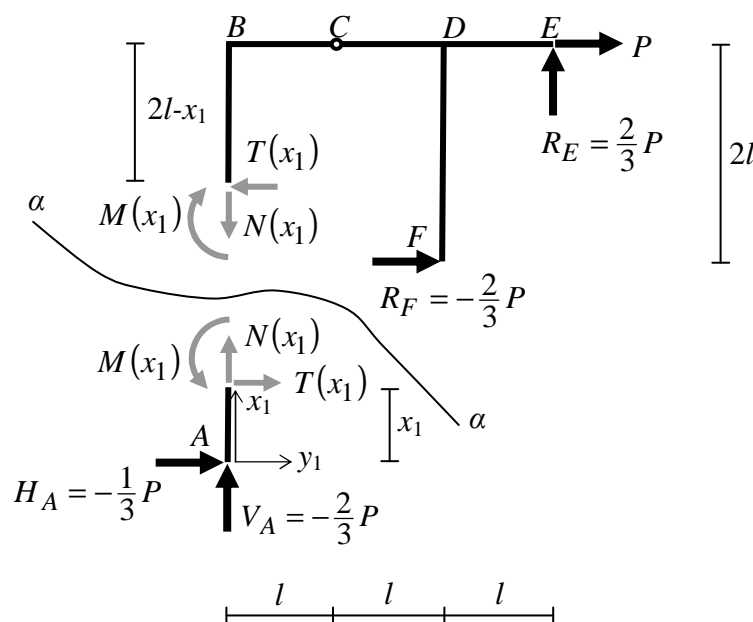
$$\sum_i P_{ix} = H_A + R_F + P = -\frac{1}{3}P - \frac{2}{3}P + P \equiv 0$$

Równanie spełnione jest tożsamościowo.

W celu wyznaczenia funkcji sił przekrojowych w czterech przedziałach ($A-B$, $B-D$, $D-E$ i $F-D$) wykonujemy „myślowo” przekroje w tych przedziałach. Wprowadzamy też układy lokalne $x_i y_i$.



Przedział $A-B$, $x_1 \in \langle 0, 2l \rangle$



Funkcje sił przekrojowych wyznaczamy przekształcając równania równowagi zapisane dla wybranego podukładu. Funkcje te nie zależą od wyboru podukładu, wobec tego należy kierować się analizą, dla którego podukładu nakład pracy rachunkowej będzie mniejszy. W rozpatrywanym przypadku warunek ten spełnia dolna część lewego słupka.

$$\sum_i P_{ix_1} = 0 \Leftrightarrow N(x_1) + V_A = 0 \Rightarrow N(x_1) = -V_A = -\left(-\frac{2}{3}P\right) \Rightarrow \underline{N(x_1) = \frac{2}{3}P}$$

$$\sum_i P_{iy_1} = 0 \Leftrightarrow T(x_1) + H_A = 0 \Rightarrow T(x_1) = -H_A = -\left(-\frac{1}{3}P\right) \Rightarrow \underline{T(x_1) = \frac{1}{3}P}$$

$$\sum_i M_{i\alpha-\alpha} = 0 \Leftrightarrow M(x_1) + H_A \cdot x_1 = 0 \Rightarrow M(x_1) = -H_A \cdot x_1 = -\left(-\frac{1}{3}P\right) \cdot x_1$$

$$\Rightarrow \underline{M(x_1) = \frac{1}{3}P \cdot x_1}$$

Funkcje sił $N(x_1) = \frac{2}{3}P$ i $T(x_1) = \frac{1}{3}P$ są stałe, natomiast moment jest opisany funkcją liniową. Poniżej wykażemy, że funkcje te spełniają zależności różniczkowe.

$$\frac{dN(x_1)}{dx_1} = \frac{d\left(\frac{2}{3}P\right)}{dx_1} = 0 \Rightarrow \frac{dN(x_1)}{dx_1} \equiv -q_s(x_1)$$

$$\frac{dT(x_1)}{dx_1} = \frac{d\left(\frac{1}{3}P\right)}{dx_1} = 0 \Rightarrow \frac{dT(x_1)}{dx_1} \equiv -q_n(x_1)$$

$$\frac{dM(x_1)}{dx_1} = \frac{d\left(\frac{1}{3}P \cdot x_1\right)}{dx_1} = \frac{1}{3}P \Rightarrow \frac{dM(x_1)}{dx_1} \equiv T(x_1)$$

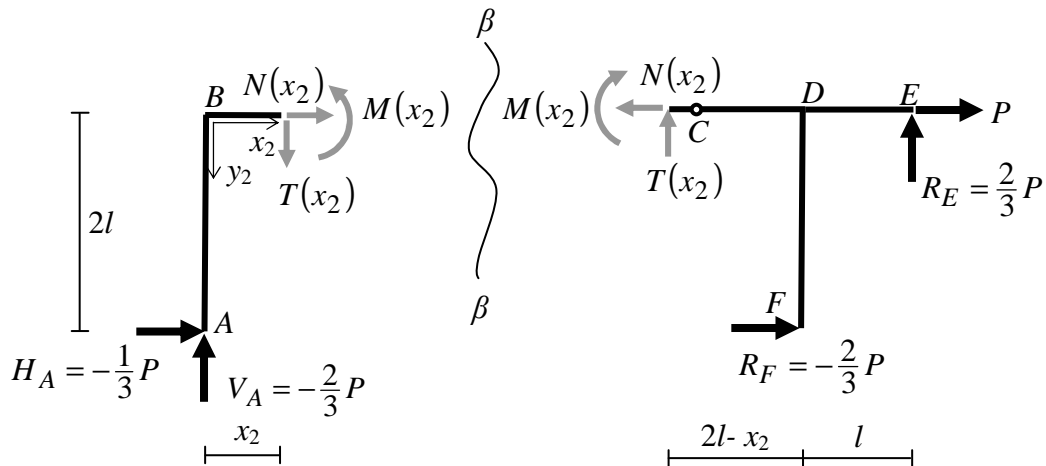
W celu sporządzenia wykresu momentu gnącego opisanego funkcją $M(x_1) = \frac{1}{3}P \cdot x_1$ w przedziale $A-B$, wystarczy wyznaczyć wartości tej funkcji w dwóch punktach (przekrojach).

$$M(x_1 = 0) = \frac{1}{3}P \cdot 0 = 0$$

$$M(x_1 = 2l) = \frac{1}{3}P \cdot 2l = \frac{2}{3}Pl$$

Dodatnia wartość momentu $M(x_1 = 2l) = \frac{2}{3}Pl$ świadczy o tym, że moment ten rozciąga włókna prawe.

Przedział B-D, $x_2 \in \langle 0, 2l \rangle$



Równania równowagi zapisujemy dla lewego podkadłtu.

$$\sum_i P_{ix_2} = 0 \Leftrightarrow N(x_2) + H_A = 0 \Rightarrow N(x_2) = -H_A = -\left(-\frac{1}{3}P\right) \Rightarrow \underline{N(x_2) = \frac{1}{3}P}$$

$$\sum_i P_{iy_2} = 0 \Leftrightarrow T(x_2) - V_A = 0 \Rightarrow T(x_2) = V_A = -\frac{2}{3}P \Rightarrow \underline{T(x_2) = -\frac{2}{3}P}$$

$$\begin{aligned} \sum_i M_{i\beta-\beta} = 0 &\Leftrightarrow M(x_2) - V_A \cdot x_2 + H_A \cdot 2l = 0 \Rightarrow M(x_2) = -H_A \cdot 2l + V_A \cdot x_2 = \\ &= -\left(-\frac{1}{3}P\right) \cdot 2l + \left(-\frac{2}{3}P\right) \cdot x_2 \Rightarrow \underline{M(x_2) = \frac{2}{3}Pl - \frac{2}{3}P \cdot x_2} \end{aligned}$$

Funkcje sił $N(x_2) = \frac{1}{3}P$ i $T(x_2) = -\frac{2}{3}P$ są stałe, natomiast moment jest opisany funkcją liniową. Poniżej wykażemy, że wyznaczone funkcje sił przekrojowych spełniają zależności różniczkowe.

$$\frac{dN(x_2)}{dx_2} = \frac{d\left(\frac{1}{3}P\right)}{dx_2} = 0 \Rightarrow \frac{dN(x_2)}{dx_2} \equiv -q_s(x_2)$$

$$\frac{dT(x_2)}{dx_2} = \frac{d\left(-\frac{2}{3}P\right)}{dx_2} = 0 \Rightarrow \frac{dT(x_2)}{dx_2} \equiv -q_n(x_2)$$

$$\frac{dM(x_2)}{dx_2} = \frac{d\left(\frac{2}{3}Pl - \frac{2}{3}P \cdot x_2\right)}{dx_2} = -\frac{2}{3}P \Rightarrow \frac{dM(x_2)}{dx_2} \equiv T(x_2)$$

W celu sporządzenia wykresu momentu gnącego opisanego funkcją $M(x_2) = \frac{2}{3}Pl - \frac{2}{3}P \cdot x_2$ w przedziale $B-D$, wystarczy wyznaczyć wartości tej funkcji w dwóch przekrojach.

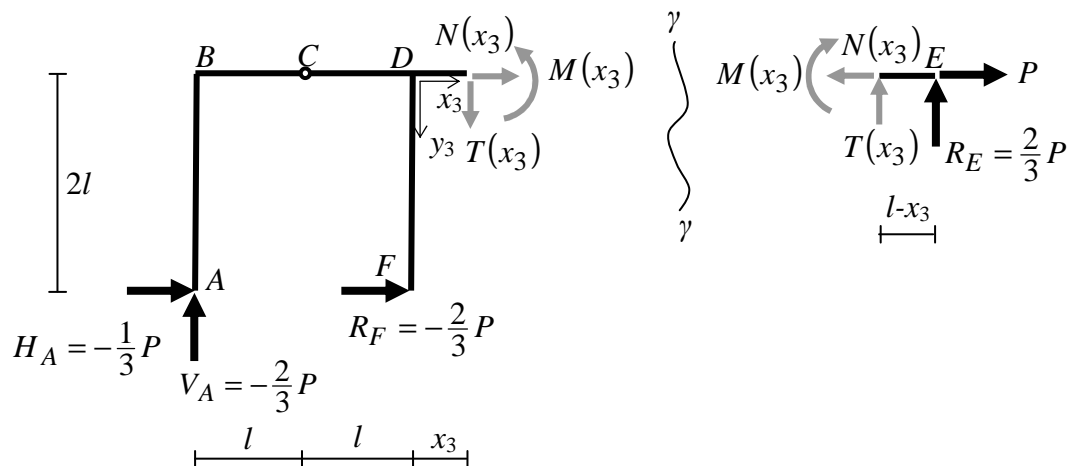
$$M(x_2 = 0) = \frac{2}{3}Pl - \frac{2}{3}P \cdot 0 = \frac{2}{3}Pl$$

$$M(x_2 = 2l) = \frac{2}{3}Pl - \frac{2}{3}P \cdot 2l = -\frac{2}{3}Pl$$

Moment $M(x_2 = 0)$ ma wartość dodatnią, czyli powoduje rozciąganie dolnych włókien, natomiast moment $M(x_2 = 2l)$ ma wartość ujemną, a więc powoduje rozciąganie górnych włókien. Korzystając z funkcji $M(x_2)$ sprawdzamy jeszcze, czy wartość momentu w punkcie C (w przegubie) jest zerowa.

$$M(x_2 = l) = \frac{2}{3}Pl - \frac{2}{3}P \cdot l = 0$$

Przedział $D-E$, $x_3 \in \langle 0, l \rangle$



Równania równowagi zapisujemy dla prawego podukładu.

$$\sum_i P_{ix_3} = 0 \Leftrightarrow -N(x_3) + P = 0 \Rightarrow \underline{N(x_3) = P}$$

$$\sum_i P_{iy_3} = 0 \Leftrightarrow -T(x_3) - R_E = 0 \Rightarrow T(x_3) = -R_E = -\left(\frac{2}{3}P\right) \Rightarrow \underline{T(x_3) = -\frac{2}{3}P}$$

$$\begin{aligned} \sum_i M_{i\gamma-\gamma} = 0 &\Leftrightarrow -M(x_3) + R_E \cdot (l - x_3) = 0 \Rightarrow M(x_3) = R_E \cdot (l - x_3) = \\ &= \frac{2}{3}P \cdot (l - x_3) \Rightarrow \underline{M(x_3) = \frac{2}{3}Pl - \frac{2}{3}P \cdot x_3} \end{aligned}$$

Funkcje sił $N(x_3) = P$ i $T(x_3) = -\frac{2}{3}P$ są stałe, natomiast moment jest opisany funkcją liniową. Poniżej wykażemy, że wyznaczone funkcje sił przekrojowych spełniają zależności różniczkowe.

$$\frac{dN(x_3)}{dx_3} = \frac{d(P)}{dx_3} = 0 \Rightarrow \frac{dN(x_3)}{dx_3} \equiv -q_s(x_3)$$

$$\frac{dT(x_3)}{dx_3} = \frac{d\left(-\frac{2}{3}P\right)}{dx_3} = 0 \Rightarrow \frac{dT(x_3)}{dx_3} \equiv -q_n(x_3)$$

$$\frac{dM(x_3)}{dx_3} = \frac{d\left(\frac{2}{3}Pl - \frac{2}{3}P \cdot x_3\right)}{dx_3} = -\frac{2}{3}P \Rightarrow \frac{dM(x_3)}{dx_3} \equiv T(x_3)$$

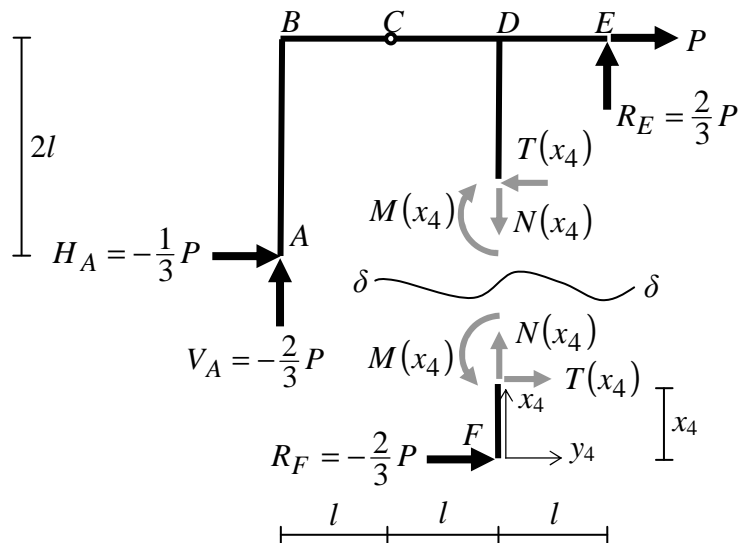
W celu sporządzenia wykresu momentu gnącego opisanego funkcją $M(x_3) = \frac{2}{3}Pl - \frac{2}{3}P \cdot x_3$ w przedziale $D-E$, wystarczy wyznaczyć wartości tej funkcji w dwóch przekrojach.

$$M(x_3 = 0) = \frac{2}{3}Pl - \frac{2}{3}P \cdot 0 = \frac{2}{3}Pl$$

$$M(x_3 = l) = \frac{2}{3}Pl - \frac{2}{3}P \cdot l = 0$$

Moment $M(x_3 = 0)$ ma wartość dodatnią, czyli powoduje rozciąganie dolnych włókien, natomiast moment $M(x_3 = l)$ ma wartość zerową.

Przedział $F-D$, $x_4 \in \langle 0, 2l \rangle$



Równania równowagi zapisujemy dla dolnej części przedziału $F-D$.

$$\sum_i P_{ix_4} = 0 \Leftrightarrow N(x_4) = 0 \Rightarrow \underline{N(x_4) = 0}$$

$$\sum_i P_{iy_4} = 0 \Leftrightarrow T(x_4) + R_F = 0 \Rightarrow T(x_4) = -R_F = -\left(-\frac{2}{3}P\right) \Rightarrow \underline{T(x_4) = \frac{2}{3}P}$$

$$\begin{aligned} \sum_i M_{i\delta-\delta} = 0 &\Leftrightarrow M(x_4) + R_F \cdot x_4 = 0 \Rightarrow M(x_4) = -R_F \cdot x_4 = -\left(-\frac{2}{3}P\right) \cdot x_4 = \\ &= \frac{2}{3}P \cdot x_4 \Rightarrow \underline{M(x_4) = \frac{2}{3}P \cdot x_4} \end{aligned}$$

Funkcje sił $N(x_4) = 0$ i $T(x_4) = \frac{2}{3}P$ są stałe, natomiast moment jest opisany funkcją liniową.

Poniżej wykazujemy, że wyznaczone funkcje sił przekrojowych spełniają zależności różniczkowe.

$$\frac{dN(x_4)}{dx_4} = \frac{d(0)}{dx_4} = 0 \Rightarrow \frac{dN(x_4)}{dx_4} \equiv -q_s(x_4)$$

$$\frac{dT(x_4)}{dx_4} = \frac{d\left(\frac{2}{3}P\right)}{dx_4} = 0 \Rightarrow \frac{dT(x_4)}{dx_4} \equiv -q_n(x_4)$$

$$\frac{dM(x_4)}{dx_4} = \frac{d\left(\frac{2}{3}P \cdot x_4\right)}{dx_4} = \frac{2}{3}P \Rightarrow \frac{dM(x_4)}{dx_4} \equiv T(x_4)$$

W celu sporządzenia wykresu momentu gnącego opisanego funkcją $M(x_4) = \frac{2}{3}P \cdot x_4$ w przedziale $F-D$, wystarczy wyznaczyć wartości tej funkcji w dwóch przekrojach.

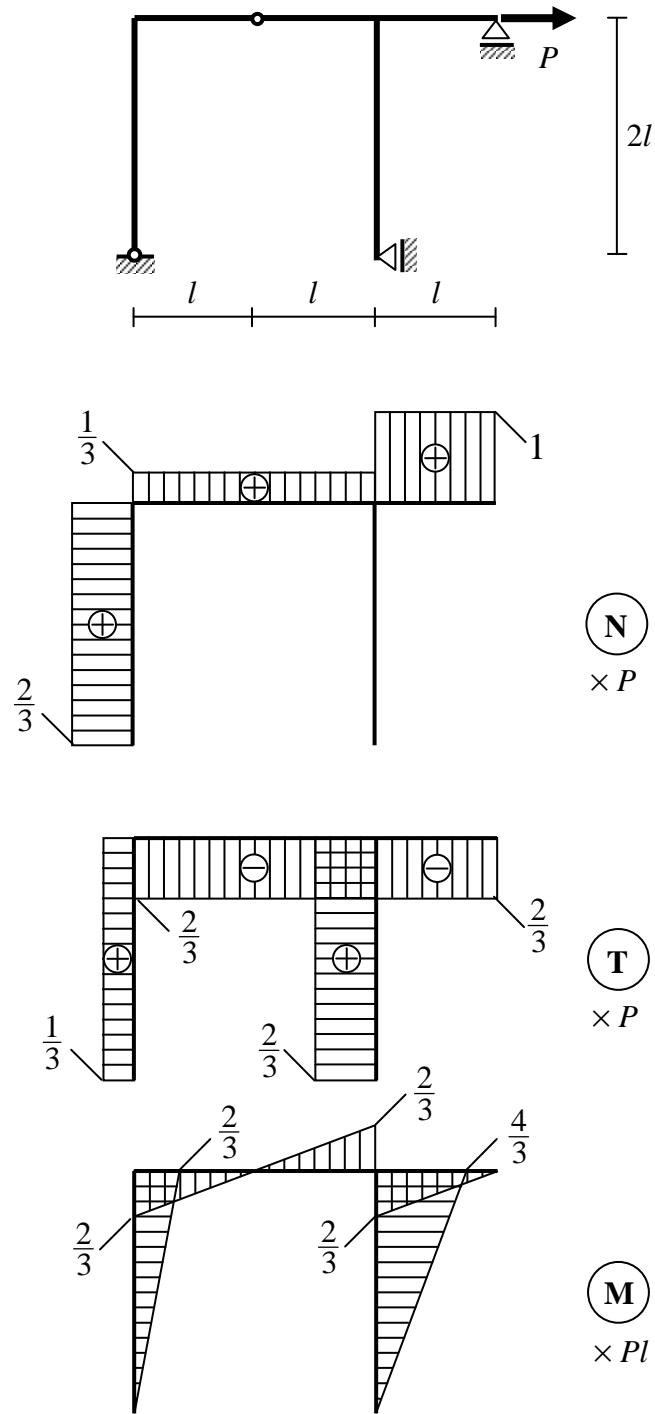
$$M(x_4 = 0) = \frac{2}{3}P \cdot 0 = 0$$

$$M(x_4 = 2l) = \frac{2}{3}P \cdot 2l = \frac{4}{3}Pl$$

Moment $M(x_4 = 2l)$ ma wartość dodatnią, czyli powoduje rozciąganie prawych włókien.

Możemy obliczyć wartości oddziaływań V_C i H_C w przegubie C , a funkcje sił przekrojowych w przedziale $B-D$ można wyznaczyć w przedziałach $B-C$ i $C-D$. W rozważanym przypadku w przedziale $B-D$ nie mamy do czynienia z występowaniem obciążenia w postaci siły skupionej, momentu czy obciążenia ciągłego o zmieniającej się skokowo wartości natężenia lub innej nieciągłości. Nie ma zatem konieczności wprowadzania przedziałów $B-C$ i $C-D$.

Wykresy sił przekrojowych

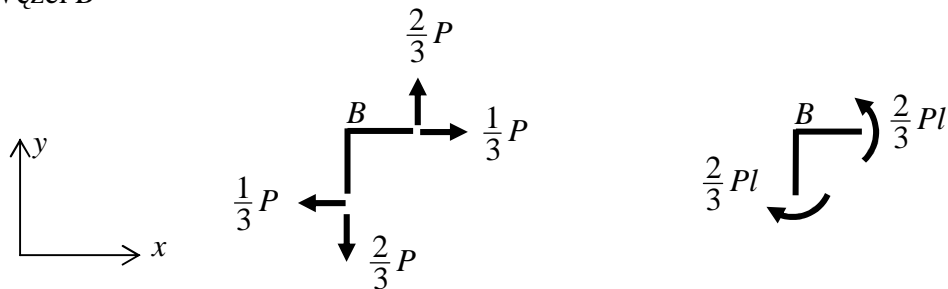


Obciążenie ramy stanowi siła skupiona, natomiast nie występuje w rozważanym układzie obciążenie ciągłe, a więc w każdym przedziale zarówno siła normalna jak i tnąca jest stała, a wykres momentu jest liniowy.

Wykonujemy jeszcze sprawdzenie równowagi węzłów B i D . Wprowadzamy „myślowo” przekroje nieskończenie blisko węzłów. W tych przekrojach zaznaczamy obliczone wartości

sił przekrojowych i zapisujemy równania równowagi. Rysunki węzłów z siłami przekrojowymi wykonane są z podziałem na siły normalne i tnące oraz momenty gnące w celu zapewnienia większej przejrzystości rysunku.

Węzeł B

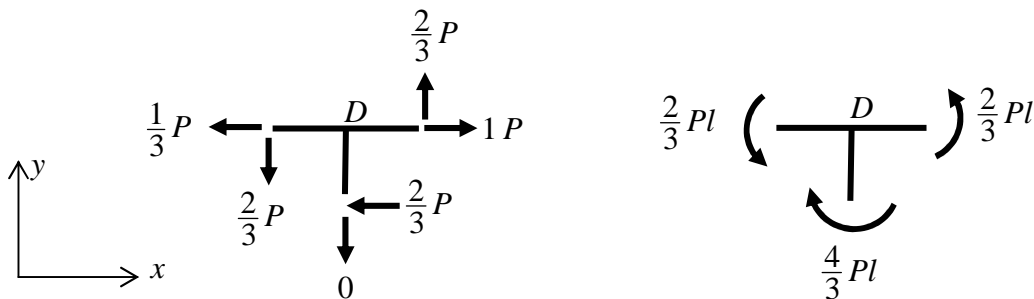


$$\sum_i P_{ix}^B = -\frac{1}{3}P + \frac{1}{3}P \equiv 0$$

$$\sum_i P_{iy}^B = -\frac{2}{3}P + \frac{2}{3}P \equiv 0$$

$$\sum_i M_i^B = -\frac{2}{3}Pl + \frac{2}{3}Pl \equiv 0$$

Węzeł D



$$\sum_i P_{ix}^D = -\frac{1}{3}P - \frac{2}{3}P + P \equiv 0$$

$$\sum_i P_{iy}^D = -\frac{2}{3}P - 0P + \frac{2}{3}P \equiv 0$$

$$\sum_i M_i^D = \frac{2}{3}Pl + \frac{2}{3}Pl - \frac{4}{3}Pl \equiv 0$$

Wszystkie równania równowagi spełnione są tożsamościowo.