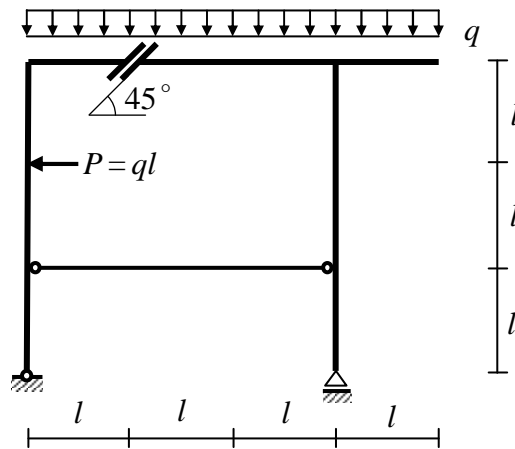
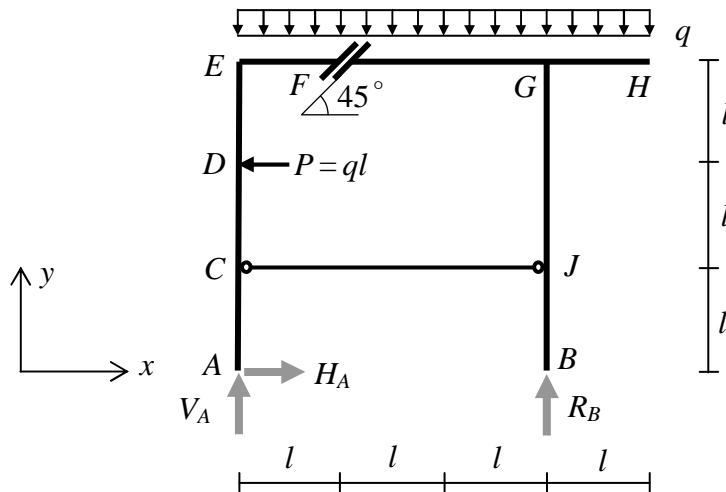


Przykład 8.3. Rama obciążona siłą skupioną i obciążeniem ciągłym

Polecenie: Dla poniższej ramy wyznaczyć funkcje sił przekrojowych oraz sporządzić ich wykresy.



Oznaczamy punkty charakterystyczne: podpory A i B , przeguby C i J , węzły sztywne E i G , oraz punkty F (połączenie teleskopowe), D (punkt przyłożenia siły $P = ql$) i H (prawy koniec rygla). W układzie oswoobodzonym od więzów podpory zastępujemy reakcjami. Wektory o nieznanymi wartościami oznaczamy szarym kolorem. Po wyznaczeniu ich wartości kolor zmieniamy na czarny.



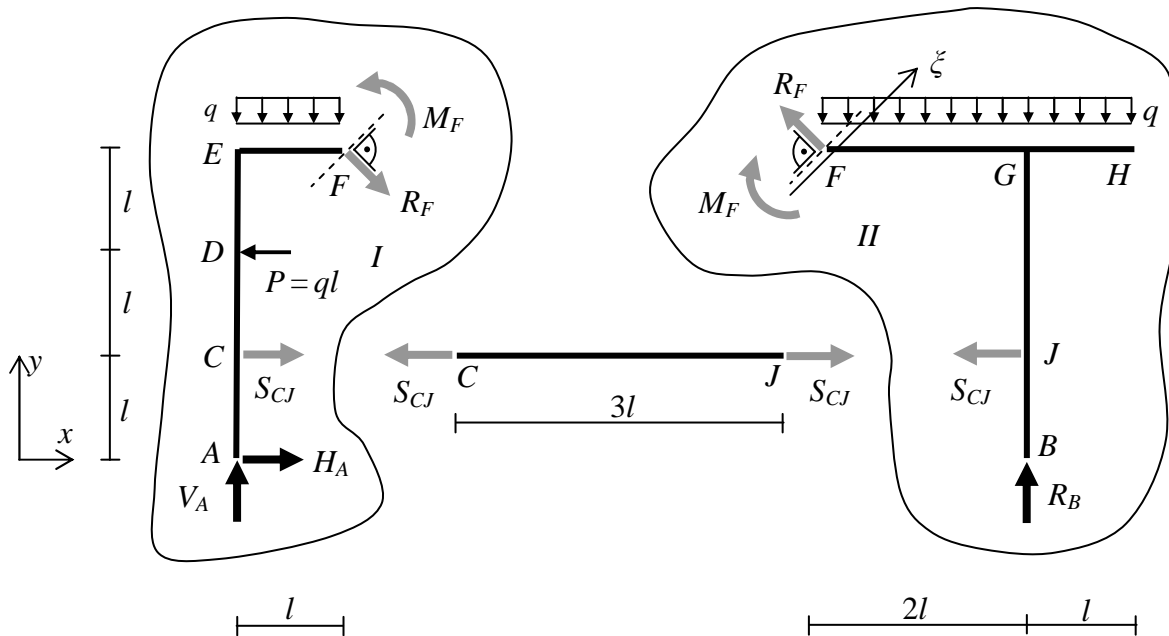
W równaniach równowagi momenty działające przeciwnie do ruchu wskazówek zegara opatrzone są znakiem dodatnim, natomiast działające zgodnie z ruchem wskazówek zegara znakiem ujemnym.

$$\sum_i P_{ix} = 0 \Leftrightarrow H_A - ql = 0 \Rightarrow H_A = ql$$

$$\sum_i M_{iA} = 0 \Leftrightarrow R_B \cdot 3l + ql \cdot 2l - q \cdot 4l \cdot 2l = 0 \Rightarrow R_B = 2ql$$

$$\sum_i P_{iy} = 0 \Leftrightarrow V_A + R_B - q \cdot 4l = 0 \Rightarrow V_A = 4ql - R_B \Rightarrow V_A = 2ql$$

W punktach C i J występują połączenia przegubowe. Na pręt $C-J$ nie działa obciążenie poprzeczne (prostopadłe do jego osi). W takim przypadku pręt ten poddany jest wyłącznie działaniu siły normalnej. W celu wyznaczenia siły S_{CJ} dzielimy układ na podukłady I i II , prowadząc przekrój przez teleskop F oraz pręt $C-J$. Przyjmujemy, że pręt $C-J$ jest rozciągany. Rysując oddziaływania w teleskopie F oraz siłę w przecie $C-J$ musimy pamiętać o zasadzie działania i przeciwdziałania.



Oddziaływanie w teleskopie R_F ma kierunek prostopadły do okładek teleskopu. Przyjmujemy kierunek osi ζ równoległy do tych okładek. Oznacza to, że w równaniu rzutów sił na oś ζ dla lewego bądź prawego podukładu nie pojawi się niewiadoma R_F . W równaniu zapisanym dla prawego podukładu wystąpi mniej składników.

$$\sum_i P_{i\zeta}^{II} = 0 \Leftrightarrow R_B \cdot \cos 45^\circ - S_{CJ} \cdot \cos 45^\circ - q \cdot 3l \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow S_{CJ} = R_B - 3ql =$$

$$= 2ql - 3ql = -ql \Rightarrow S_{CJ} = -ql$$

Ujemna wartość siły S_{CJ} świadczy o tym, że pręt $C-J$ jest ściskany.

Sprawdzamy poprawność wartości wyznaczonych reakcji oraz siły S_{CJ} zapisując równanie rzutów sił na oś ζ dla lewego podukładu. Równanie to wcześniej nie było wykorzystane.

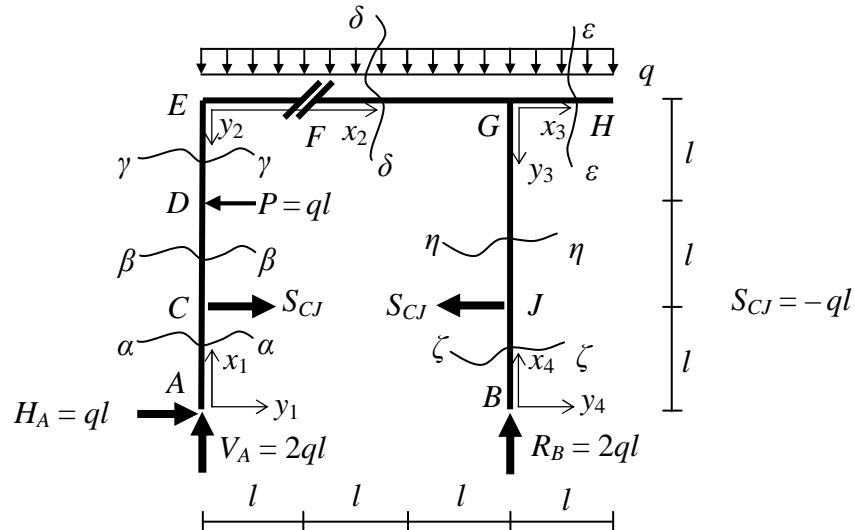
$$\sum_i P_{i\zeta}^I = V_A \cdot \cos 45^\circ + H_A \cdot \cos 45^\circ + S_{CJ} \cdot \cos 45^\circ - P \cdot \cos 45^\circ - q \cdot l \cdot \cos 45^\circ =$$

$$= (V_A + H_A + S_{CJ} - P - q \cdot l) \cdot \cos 45^\circ = (2ql + ql - ql - ql - ql) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \equiv 0$$

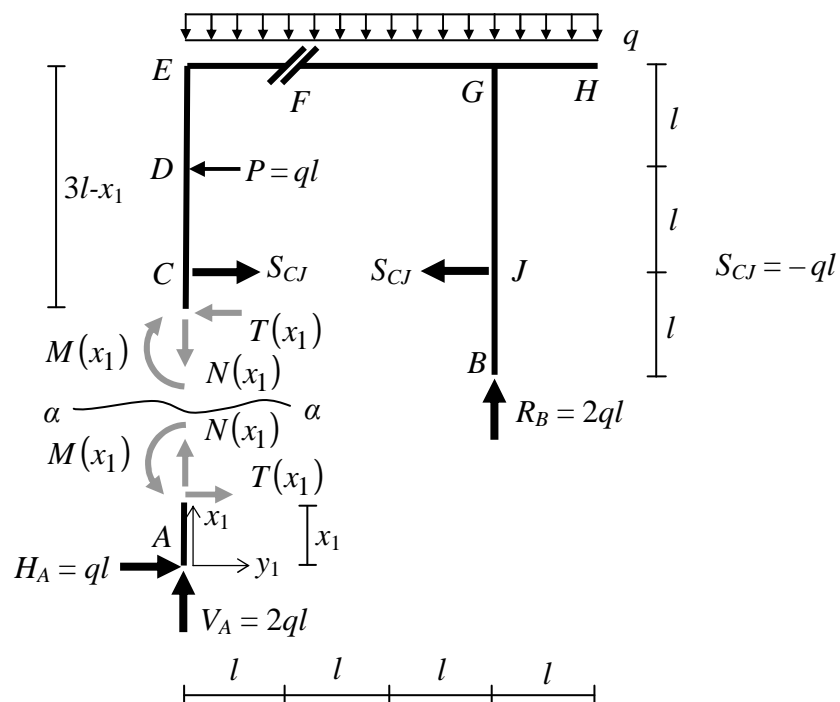
Równanie spełnione jest tożsamościowo.

W celu wyznaczenia funkcji sił przekrojowych w siedmiu przedziałach ($A-C$, $C-D$, $D-E$, $E-G$, $G-H$, $B-J$ i $J-G$) wykonujemy „myślowo” przekroje w tych przedziałach. Wprowadzamy też układy lokalne x_i, y_i .

Uwaga: możemy obliczyć wartości oddziaływań R_F i M_F w teleskopie F , a funkcje sił przekrojowych w przedziale $E-G$ można wyznaczyć w przedziałach $E-F$ i $F-G$. W rozważanym przypadku w przedziale $E-G$ nie mamy do czynienia z występowaniem obciążenia w postaci siły skupionej, momentu czy obciążenia ciągłego o zmieniającej się skokowo wartości natężenia lub innej nieciągłości. W takim przypadku nie ma konieczności wprowadzania przedziałów $E-F$ i $F-G$.



Przedział A-C, $x_1 \in \langle 0, l \rangle$



Funkcje sił przekrojowych wyznaczamy przekształcając równania równowagi zapisane dla wybranego podukładu. Funkcje te nie zależą od wyboru podukładu, zatem należy kierować się analizą, dla którego podukładu nakład pracy rachunkowej będzie mniejszy. W rozpatrywanym przypadku warunek ten spełnia dolna część lewego słupka A-E. Nie występuje konieczność rysowania obu podukładów. Można ograniczyć się do rysowania wyłącznie tego podukładu, dla którego zapisywane są równania równowagi.

$$\sum_i P_{ix_1} = 0 \Leftrightarrow N(x_1) + V_A = 0 \Rightarrow N(x_1) = -V_A = -(2ql) = -2ql \Rightarrow \underline{N(x_1) = -2ql}$$

$$\sum_i P_{iy_1} = 0 \Leftrightarrow T(x_1) + H_A = 0 \Rightarrow T(x_1) = -H_A = -(ql) = -ql \Rightarrow \underline{T(x_1) = -ql}$$

$$\sum_i M_{i\alpha-\alpha} = 0 \Leftrightarrow M(x_1) + H_A \cdot x_1 = 0 \Rightarrow M(x_1) = -H_A \cdot x_1 = -(ql) \cdot x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{M(x_1) = -ql \cdot x_1}$$

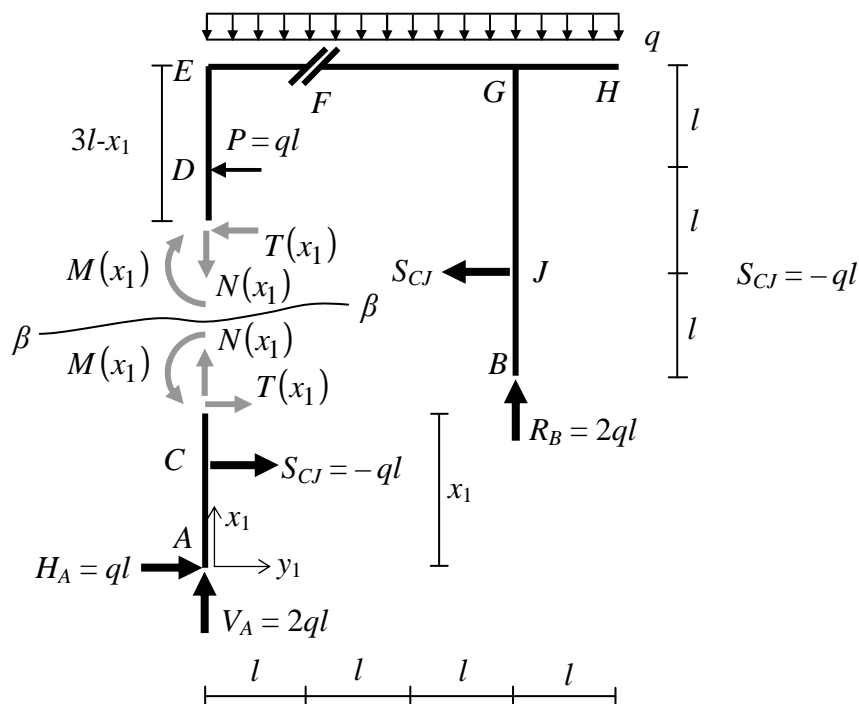
Funkcje sił $N(x_1) = -2ql$ i $T(x_1) = -ql$ są stałe, natomiast moment jest opisany funkcją liniową $M(x_1) = -ql \cdot x_1$. W celu sporządzenia wykresu momentu gnącego opisanego funkcją $M(x_1) = -ql \cdot x_1$ w przedziale A-C wystarczy wyznaczyć wartości tej funkcji w dwóch punktach (przekrojach).

$$M(x_1 = 0) = -ql \cdot 0 = 0$$

$$M(x_1 = l) = -ql \cdot l = -ql^2$$

Ujemna wartość momentu $M(x_1 = l) = -ql^2$ świadczy o tym, że moment ma zwrot przeciwny do założonego i powoduje rozciąganie lewych włókien pręta.

Przedział C-D, $x_1 \in \langle l, 2l \rangle$



Podobnie jak w poprzednim przedziale rozpatrujemy równowagę dolnej części lewego słupka A-C.

$$\sum_i P_{ix_1} = 0 \Leftrightarrow N(x_1) + V_A = 0 \Rightarrow N(x_1) = -V_A = -(2ql) = -2ql \Rightarrow \underline{N(x_1) = -2ql}$$

$$\sum_i P_{iy_1} = 0 \Leftrightarrow T(x_1) + H_A + S_{CJ} = 0 \Rightarrow T(x_1) = -H_A - S_{CJ} = -(ql) - (-ql) = 0 \Rightarrow$$

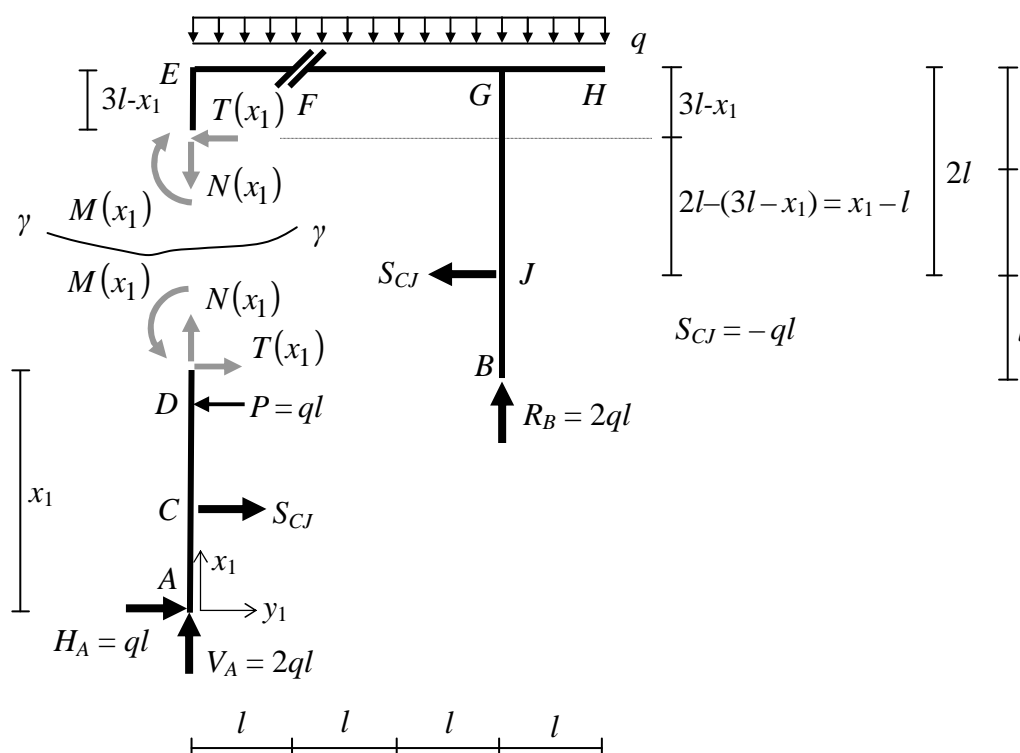
$$\Rightarrow \underline{T(x_1) = 0}$$

$$\sum_i M_{i\beta-\beta} = 0 \Leftrightarrow M(x_1) + H_A \cdot x_1 - S_{CJ} \cdot (x_1 - l) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(x_1) = -H_A \cdot x_1 - S_{CJ} \cdot (x_1 - l) = -ql \cdot x_1 - (-ql) \cdot (x_1 - l) = -ql^2 \Rightarrow \underline{M(x_1) = -ql^2}$$

Funkcje sił $N(x_1) = -2ql$ i $T(x_1) = 0$ są stałe. Moment też opisany jest funkcją stałą. Ujemna wartość $M(x_1) = -ql^2$ świadczy o tym, że moment ma zwrot przeciwny do założonego i powoduje rozciąganie lewych włókien pręta.

Przedział D-E, $x_1 \in \langle 2l, 3l \rangle$



Równania równowagi zapisujemy dla prawego podukładu, w którego skład wchodzi rygiel E-H, prawy słupek B-G i górna część lewego słupka.

$$\sum_i P_{ix_1} = 0 \Leftrightarrow -N(x_1) + R_B - q \cdot 4l = 0 \Rightarrow N(x_1) = +R_B - 4ql = 2gl - 4ql = -2ql \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{N(x_1) = -2ql}$$

$$\sum_i P_{iy_1} = 0 \Leftrightarrow -T(x_1) - S_{CJ} = 0 \Rightarrow T(x_1) = -S_{CJ} = -(-ql) = 0 \Rightarrow \underline{T(x_1) = ql}$$

$$\sum_i M_{i\gamma-\gamma} = 0 \Leftrightarrow -M(x_1) + R_B \cdot 3l - q \cdot 4l \cdot \frac{1}{2} \cdot 4l - S_{CJ} \cdot (x_1 - l) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(x_1) = R_B \cdot 3l - 8ql^2 - S_{CJ} \cdot (x_1 - l) = 2ql \cdot 3l - 8ql^2 - (-ql) \cdot (x_1 - l) =$$

$$= -2ql^2 + ql \cdot (x_1 - l) \Rightarrow \underline{M(x_1) = ql \cdot x_1 - 3ql^2}$$

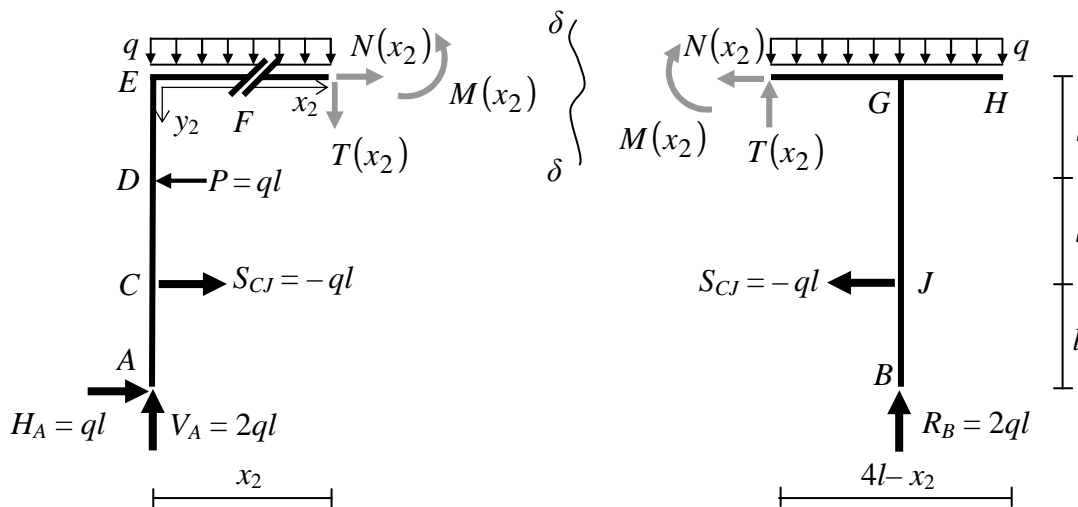
Funkcje sił $N(x_1) = -2ql$ i $T(x_1) = ql$ są stałe. Moment opisany jest funkcją liniową $M(x_1) = ql \cdot x_1 - 3ql^2$. W celu sporządzenia wykresu momentu gnącego opisanego powyższą funkcją w przedziale $E-G$ należy wyznaczyć wartości tej funkcji w dwóch punktach (przekrojach).

$$M(x_1 = 2l) = ql \cdot 2l - 3ql^2 = -ql^2$$

$$M(x_1 = 3l) = ql \cdot 3l - 3ql^2 = 0$$

Ujemna wartość momentu $M(x_1 = 2l) = -ql^2$ świadczy o tym, że moment ma zwrot przeciwny do założonego i powoduje rozciąganie lewych włókien pręta. Fakt, że moment gnący w przekroju znajdującym się nieskończenie blisko węzła sztywnego (punkt E) ma wartość zerową należy traktować jako szczególny przypadek.

Przedział $E-G$, $x_2 \in \langle 0, 3l \rangle$



Równania równowagi zapisujemy dla prawego podukładu.

$$\sum_i P_{ix2} = 0 \Leftrightarrow -N(x_2) - S_{CJ} = 0 \Rightarrow N(x_2) = -S_{CJ} = -(-ql) = ql \Rightarrow \underline{N(x_2) = ql}$$

$$\sum_i P_{iy2} = 0 \Leftrightarrow -T(x_2) - R_B + q \cdot (4l - x_2) = 0 \Rightarrow T(x_2) = -R_B + q \cdot (4l - x_2) =$$

$$= -2ql + 4ql - qx_2 = 2ql - qx_2 \Rightarrow \underline{T(x_2) = 2ql - qx_2}$$

$$\begin{aligned}
\sum_i M_{i\delta-\delta} = 0 &\Leftrightarrow -M(x_2) + R_B \cdot (4l - x_2 - l) - q \cdot (4l - x_2) \cdot \frac{1}{2}(4l - x_2) - S_{CJ} \cdot 2l = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow M(x_2) = R_B \cdot (4l - x_2 - l) - q \cdot (4l - x_2) \cdot \frac{1}{2}(4l - x_2) + S_{CJ} \cdot 2l = \\
&= 2ql \cdot (3l - x_2) - \frac{1}{2}q \cdot (4l - x_2)^2 + (-ql) \cdot 2l = 6ql^2 - 2ql \cdot x_2 - \frac{1}{2}q(4l - x_2)^2 - 2ql^2 = \\
&= 4ql^2 - 2qlx_2 - \frac{1}{2}q(16l^2 - 8lx_2 + x_2^2) = 2qlx_2 - \frac{1}{2}qx_2^2 \Rightarrow \underline{M(x_2) = 2qlx_2 - \frac{1}{2}qx_2^2}
\end{aligned}$$

Zauważmy, że równanie sumy momentów zapisane dla lewego podukładu zawiera więcej składników, a mimo to pod względem rachunkowym nieco łatwiej można z niego wyznaczyć funkcję momentu.

$$\begin{aligned}
\sum_i M_{i\delta-\delta} = 0 &\Leftrightarrow M(x_2) + q \cdot x_2 \cdot \frac{1}{2}x_2 - V_A \cdot x_2 + H_A \cdot 3l + S_{CJ} \cdot 2l - P \cdot l = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow M(x_1) = -q \cdot x_2 \cdot \frac{1}{2}x_2 + V_A \cdot x_2 - H_A \cdot 3l - S_{CJ} \cdot 2l + P \cdot l = \\
&= -\frac{1}{2}q \cdot x_2^2 + 2ql \cdot x_2 - ql \cdot 3l - (-ql) \cdot 2l + ql \cdot l = -\frac{1}{2}q \cdot x_2^2 + 2ql \cdot x_2 - 3ql^2 + 2ql^2 + ql^2 = \\
&= 2qlx_2 - \frac{1}{2}qx_2^2 \Rightarrow \underline{M(x_2) = 2qlx_2 - \frac{1}{2}qx_2^2}
\end{aligned}$$

Funkcje sił przekrojowych nie zależą od wyboru podukładu, dla którego są zapisane (a następnie przekształcone) równania równowagi.

Funkcja siły normalnej $N(x_2) = ql$ jest stała. Siła tnąca opisana jest funkcją liniową $T(x_2) = 2ql - qx_2$, ponieważ w analizowanym przedziale działa obciążenie ciągłe $q_n = q = \text{const}$. W celu sporządzenia jej wykresu należy wyznaczyć rzędne w dwóch przekrojach.

$$T(x_2 = 0) = 2ql - q \cdot 0 = 2ql$$

$$T(x_2 = 3l) = 2ql - q \cdot 3l = -ql$$

Siła tnąca w rozpatrywanym przedziale zmienia znak. Oznacza to, że w tym przedziale znajduje się przekrój, w którym siła tnąca ma wartość zerową. Współrzędną x_2 przekroju, w którym siła tnąca zeruje się, można wyznaczyć przyrównując funkcję siły tnącej do zera.

$$T(x_2) = 2ql - qx_2 = 0 \Rightarrow 2ql - qx_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2l$$

Moment opisany jest funkcją kwadratową $M(x_2) = 2ql \cdot x_2 - \frac{1}{2}qx_2^2$ w związku z występowaniem w rozpatrywanym przedziale obciążenia ciągłego $q_n = q = \text{const}$. W celu sporządzenia wykresu momentu gnącego opisanego powyższą funkcją w przedziale D-E wystarczy wyznaczyć wartości tej funkcji w trzech punktach (przekrojach).

$$M(x_2 = 0) = 2ql \cdot x_2 - \frac{1}{2}qx_2^2 = 2ql \cdot 0 - \frac{1}{2}q \cdot 0^2 = 0$$

$$M(x_2 = 3l) = 2ql \cdot 3l - \frac{1}{2}q \cdot (3l)^2 = \frac{3}{2}ql^2$$

Wyznaczamy również wartość momentu gnącego w przekroju, w którym zeruje się siła tnąca.

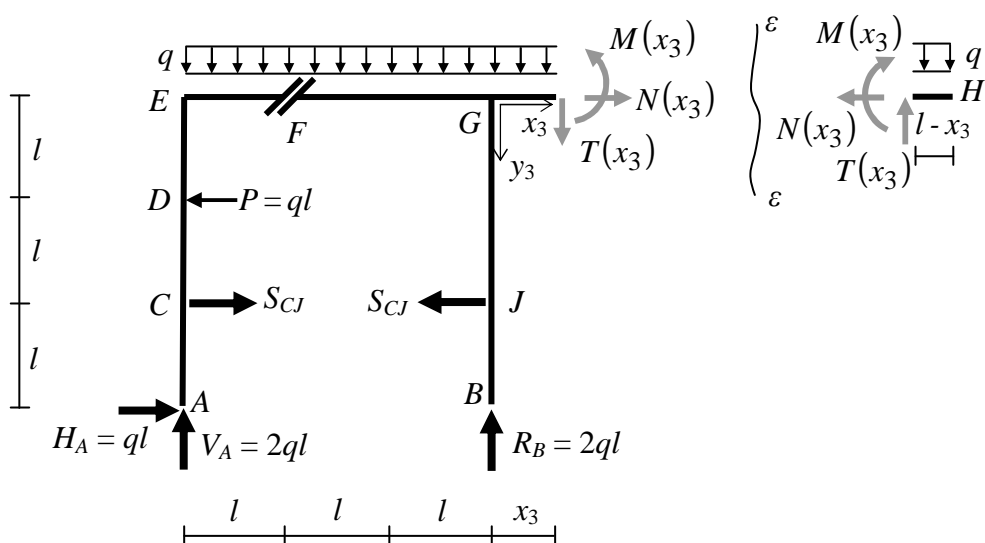
$$\frac{dM(x_2)}{dx_2} = T(x_2)$$

Z powyższej zależności różniczkowej wynika, że w przekroju, w którym siła tnąca ma wartość zerową, pierwsza pochodna momentu jest równa zero. Oznacza to, że w tym przekroju moment gnący osiąga wartość ekstremalną.

$$M(x_2 = 2l) = M_{\text{ekstr.}} = 2ql \cdot 2l - \frac{1}{2}q \cdot (2l)^2 = 2ql^2$$

W każdym przekroju w rozpatrywanym przedziale momenty mają wartości dodatnie. Wynika z tego, że momenty gnące mają zwroty zgodne ze zwrotem przyjętym, czyli rozciągają dolne włókna. Fakt, że moment gnący w przekroju znajdującym się nieskończenie blisko węzła sztywnego (punkt E) $M(x_2 = 0) = 0$ należy taktować jako szczególny przypadek.

Przedział G-H, $x_3 \in \langle 0, l \rangle$



Równania równowagi zapisujemy dla prawego podkadłtu.

$$\sum_i P_{ix_3} = 0 \Leftrightarrow -N(x_3) = 0 \Rightarrow \underline{N(x_3) = 0}$$

$$\sum_i P_{iy_3} = 0 \Leftrightarrow -T(x_3) + q \cdot (l - x_3) = 0 \Rightarrow \underline{T(x_3) = q \cdot (l - x_3)}$$

$$\sum_i M_{i\delta-\delta} = 0 \Leftrightarrow -M(x_3) - q \cdot (l - x_3) \cdot \frac{1}{2} \cdot (l - x_3) = 0 \Rightarrow M(x_3) = -\frac{1}{2}q \cdot (l - x_3)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}ql^2 + ql \cdot x_3 - \frac{1}{2}qx_3^2 \Rightarrow \underline{M(x_3) = -\frac{1}{2}ql^2 + ql \cdot x_3 - \frac{1}{2}qx_3^2}$$

Funkcja siły $N(x_3) = 0$ jest stała. Siła tnąca opisana jest funkcją liniową $T(x_3) = q \cdot (l - x_3)$ ze względu na działające obciążenie ciągłe $q_n = q = \text{const}$. Należy wyznaczyć rzędne w dwóch punktach.

$$T(x_3 = 0) = q \cdot (l - 0) = ql$$

$$T(x_3 = l) = q \cdot (l - l) = 0$$

Moment opisany jest funkcją kwadratową $M(x_3) = -\frac{1}{2}ql^2 + ql \cdot x_3 - \frac{1}{2}q \cdot x_3^2$ w związku z występowaniem w rozpatrywanym przedziale obciążenia ciągłego $q_n = q = \text{const}$. W celu sporządzenia wykresu momentu gnącego opisanego powyższą funkcją w przedziale $D-E$ należałoby wyznaczyć wartości tej funkcji w trzech punktach (przekrojach). Siła tnąca na prawym końcu rygla dla $x_3 = l$ ma wartość równą zero, a więc moment gnący w tym przekroju jest momentem ekstremalnym. Oznacza to, że styczna do wykresu momentu ma kierunek osi pręta, czyli jest pozioma. Ta informacja oraz wartości momentów wyznaczone na krańcach przedziału umożliwiają narysowanie wykresu parabolicznego.

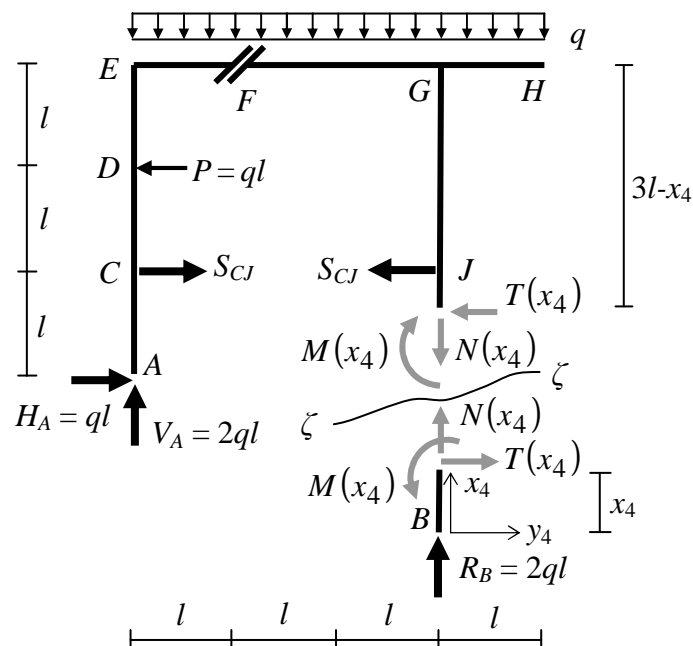
$$T(x_3 = l) = 0 \Rightarrow \frac{dM(x_3)}{dx_3} = T(x_3) \Rightarrow M(x_3 = l) = M_{\text{ekstr.}}$$

$$M(x_3 = 0) = -\frac{1}{2}ql^2 + ql \cdot 0 - \frac{1}{2}q \cdot 0^2 = -\frac{1}{2}ql^2$$

$$M(x_3 = l) = M_{\text{ekstr.}} = -\frac{1}{2}ql^2 + ql \cdot l - \frac{1}{2}q \cdot l^2 = 0$$

W każdym przekroju w rozpatrywanym przedziale momenty mają wartości ujemne. Oznacza to, że momenty mają zwroty przeciwne do zwrotu założonego, czyli rozciągają górne włókna.

Przedział B-J, $x_4 \in \langle 0, l \rangle$



Równania równowagi zapisujemy dla dolnej części pręta $B-J$.

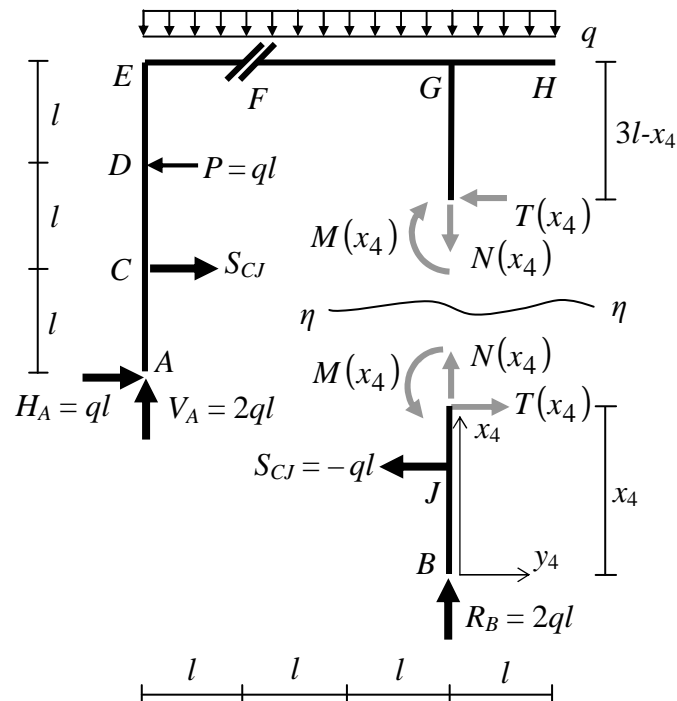
$$\sum_i P_{ix_4} = 0 \Leftrightarrow N(x_4) + R_B = 0 \Rightarrow N(x_4) = -R_B = -(2ql) \Rightarrow \underline{N(x_4) = -2ql}$$

$$\sum_i P_{iy_4} = 0 \Leftrightarrow T(x_4) = 0 \Rightarrow \underline{T(x_4) = 0}$$

$$\sum_i M_{i\zeta-\zeta} = 0 \Leftrightarrow M(x_4) = 0 \Rightarrow \underline{M(x_4) = 0}$$

Funkcja siły normalnej $N(x_4) = -2ql$ jest stała. Siła tnąca też opisana jest funkcją stałą $T(x_4) = 0$. Podobnie moment gnący w przedziale $B-J$ ma wartość stałą i równą zero $M(x_4) = 0$.

Przedział $J-G$, $x_4 \in \langle l, 3l \rangle$



Równania równowagi zapisujemy dla dolnej części pręta $B-G$.

$$\sum_i P_{ix_4} = 0 \Leftrightarrow N(x_4) + R_B = 0 \Rightarrow N(x_4) = -R_B = -(2ql) \Rightarrow \underline{N(x_4) = -2ql}$$

$$\sum_i P_{iy_4} = 0 \Leftrightarrow T(x_4) - S_{CJ} = 0 \Rightarrow T(x_4) = S_{CJ} = -ql \Rightarrow \underline{T(x_4) = -ql}$$

$$\begin{aligned} \sum_i M_{i\zeta-\zeta} = 0 &\Leftrightarrow M(x_4) - S_{CJ} \cdot (x_4 - l) = 0 \Rightarrow M(x_4) = S_{CJ} \cdot (x_4 - l) = S_{CJ} \cdot (x_4 - l) = \\ &= -ql \cdot (x_4 - l) \Rightarrow \underline{M(x_4) = -ql \cdot (x_4 - l)} \end{aligned}$$

Funkcje sił $N(x_4) = -2ql$ i $T(x_4) = -ql$ są stałe. Moment opisany jest funkcją liniową. W celu sporządzenia wykresu momentu gnącego opisanego powyższą funkcją w przedziale $J-G$ należy wyznaczyć wartości tej funkcji w dwóch punktach (przekrojach).

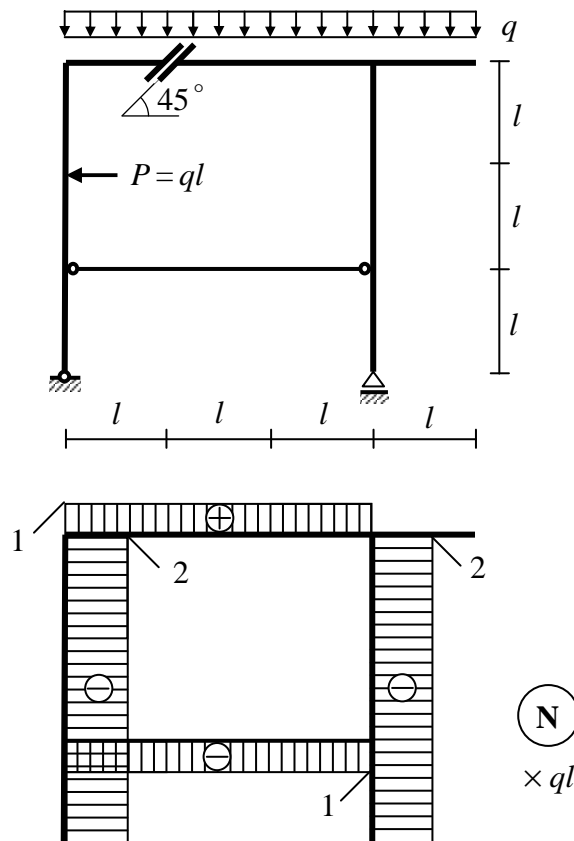
$$M(x_4 = l) = -ql \cdot (l - l) = 0$$

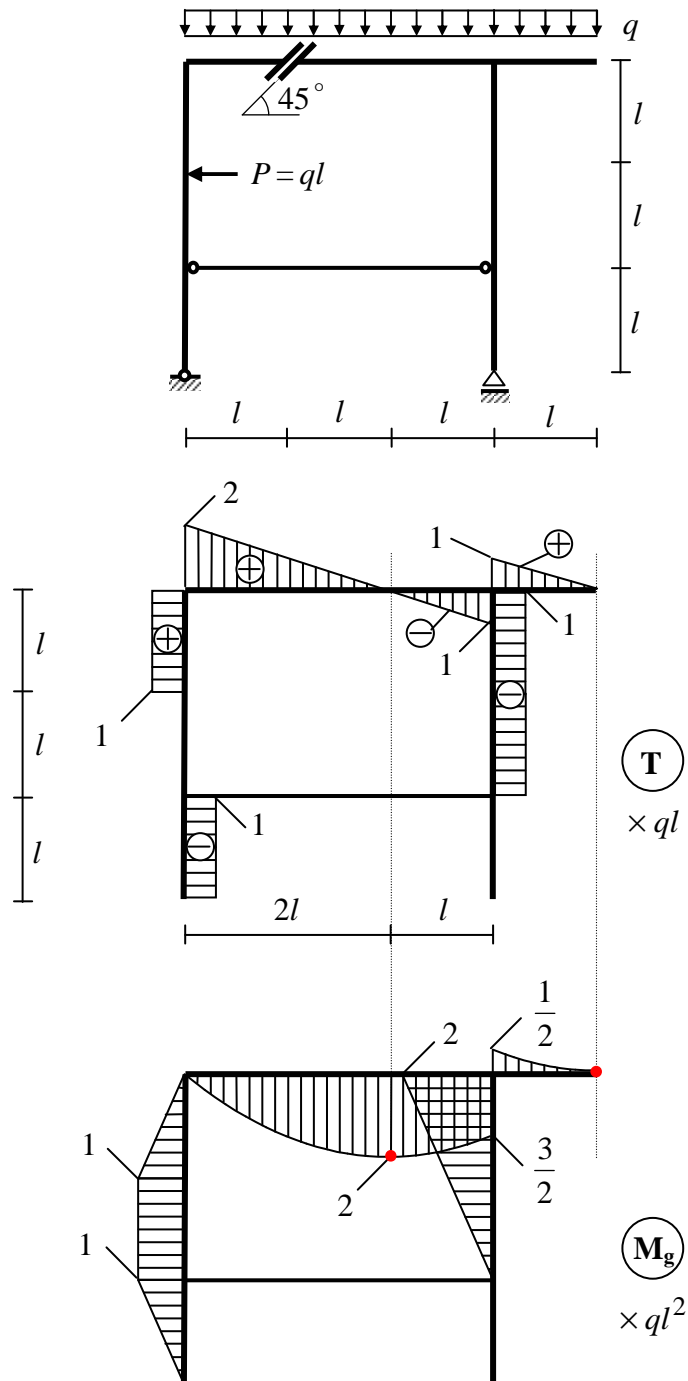
$$M(x_1 = 3l) = -ql \cdot (3l - l) = -2ql^2$$

W każdym przekroju w rozpatrywanym przedziale momenty mają wartości ujemne. Oznacza to, że momenty mają zwroty przeciwne do zwrotu założonego, czyli rozciągają lewe włókna.

Na ryglu ramy występuje obciążenie ciągłe $q_n = q = \text{const}$. W związku z tym w przedziałach $E-G$ i $G-H$ siła tnąca opisana jest funkcją liniową, natomiast moment funkcją kwadratową. W przekrojach, w których zeruje się siła tnąca, na wykresie momentów występują dwa ekstrema (oznaczone czerwonymi punktami). Na wykresie siły tnącej w punktach C, D, J i G występują nieciągłości. Ma to związek z działaniem siły S_{CJ} oraz z przyłożoną w punkcie D siłą $P = ql$ (obciążenie zewnętrzne). W punkcie G na ryglu nieciągłość na wykresie siły tnącej wynika z występowania siły normalnej w prawym słupku. W przedziale $C-D$ siła tnąca ma wartość zerową, natomiast moment jest stały. Pręt $C-J$ połączony jest ze słupkami przegubowo. W przedziale $C-J$ nie występuje obciążenie zewnętrzne, stąd pręt $C-J$ poddany jest działaniu wyłącznie siły normalnej. Na wykresach siły tnącej i momentu gnącego w tym przedziale rzędne są zerowe. W związku z brakiem występowania obciążenia ciągłego q_s (stycznego do osi pręta), wykres siły normalnej w każdym przedziale jest stały.

Wykresy sił przekrojowych





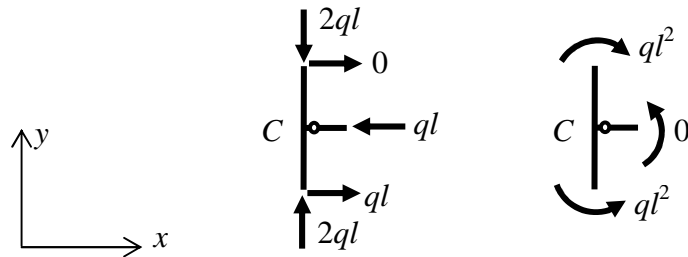
Rysując rzędne wykresów należy zachować skalę.

Czytelnika zachęca się do sprawdzenia, czy w rozpatrywanych przedziałach wyznaczone funkcje sił przekrojowych spełniają zależności różniczkowe.

Wykonamy jeszcze sprawdzenie równowagi węzłów C , D , E , J i G . Wprowadzamy „myślowo” przekroje nieskończenie blisko węzłów. W tych przekrojach zaznaczamy obliczone wartości sił przekrojowych i zapisujemy równania równowagi. Rysunki węzłów

z siłami przekrojowymi wykonane są z podziałem na siły normalne i tnące oraz momenty gnące w celu zapewnienia większej przejrzystości rysunku.

Węzeł C

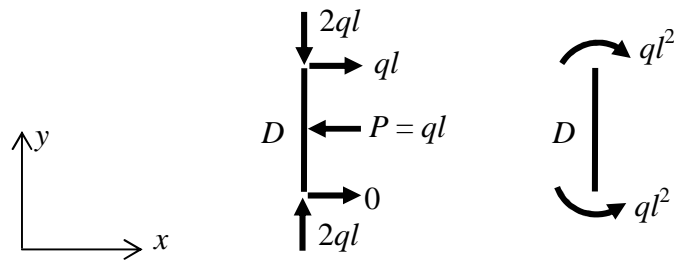


$$\sum_i P_{ix}^C = ql - ql \equiv 0$$

$$\sum_i P_{iy}^C = 2ql - 2ql \equiv 0$$

$$\sum_i M_i^C = ql^2 - ql^2 \equiv 0$$

Węzeł D

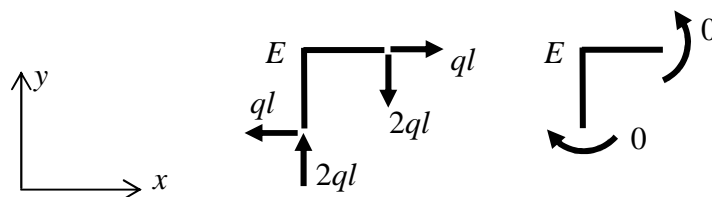


$$\sum_i P_{ix}^D = 0 - ql + ql \equiv 0$$

$$\sum_i P_{iy}^D = 2ql - 2ql \equiv 0$$

$$\sum_i M_i^D = ql^2 - ql^2 \equiv 0$$

Węzeł E

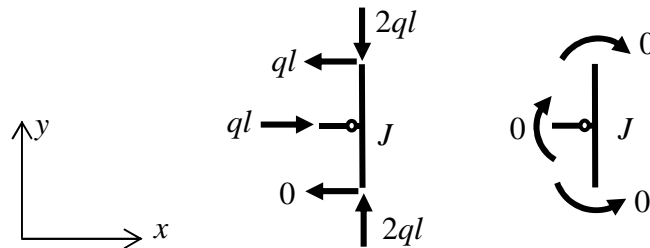


$$\sum_i P_{ix}^E = -ql + ql \equiv 0$$

$$\sum_i P_{iy}^E = 2ql - 2ql \equiv 0$$

$$\sum_i M_i^E = 0 - 0 \equiv 0$$

Węzeł J

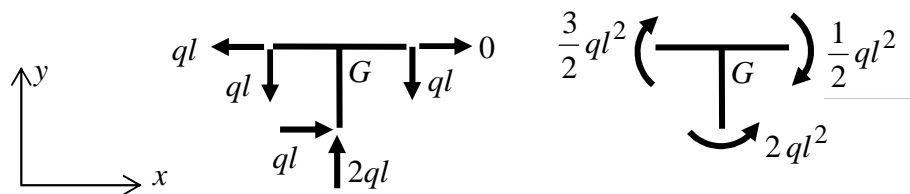


$$\sum_i P_{ix}^J = ql - ql + 0 \equiv 0$$

$$\sum_i P_{iy}^J = 2ql - 2ql \equiv 0$$

$$\sum_i M_i^J = 0 - 0 - 0 \equiv 0$$

Węzeł G



$$\sum_i P_{ix}^G = -ql + ql + 0 \equiv 0$$

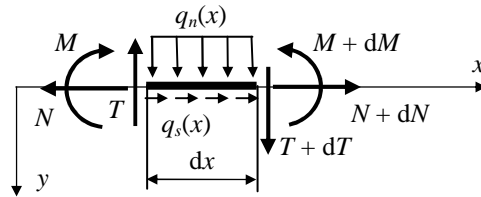
$$\sum_i P_{iy}^G = -ql + 2ql - ql \equiv 0$$

$$\sum_i M_i^G = 2ql^2 - \frac{1}{2}ql^2 - \frac{3}{2}ql^2 \equiv 0$$

Wszystkie równania równowagi dla węzłów spełnione są tożsamościowo.

W przypadku, gdy polecenie do zadania nie obejmuje wyznaczenia funkcji sił przekrojowych, a jedynie sporządzenie wykresów tych sił, możemy wyznaczyć rzędne wykresów jako

wartości sił przekrojowych w wybranych przekrojach, po czym uwzględniając zależności różniczkowe wykonać wykresy.



Zależności różniczkowe

$$\frac{dN}{dx} = -q_s(x) \quad \frac{dT}{dx} = -q_n(x) \quad \text{oraz} \quad \frac{dM}{dx} = T(x)$$

Z zależności tych korzystamy sprawdzając poprawność wyznaczonych funkcji sił przekrojowych oraz wykresów sił przekrojowych w przypadku prętów o osi prostej. Możemy również po przekształceniu tych zależności wyznaczyć wzory na wartości funkcji sił przekrojowych $N(x_k)$, $T(x_k)$ i $M(x_k)$ w przekroju o współrzędnej x_k należącej do rozważanego przedziału.

$$N(x_k) = N(x_0) - \int_{x_0}^{x_k} q_s(x) dx$$

$$T(x_k) = T(x_0) - \int_{x_0}^{x_k} q_n(x) dx$$

$$M(x_k) = M(x_0) + \int_{x_0}^{x_k} T(x) dx$$

Całka $\int_{x_0}^{x_k} q_s(x) dx$ jest wypadkową obciążenia stycznego $q_s(x)$ działającego w przedziale

$x \in \langle x_0, x_k \rangle$. Obciążenie styczne $q_s(x)$ ma kierunek osi pręta. Wartość tego obciążenia jest dodatnia, gdy jego zwrot jest zgodny ze zwrotem osi x .

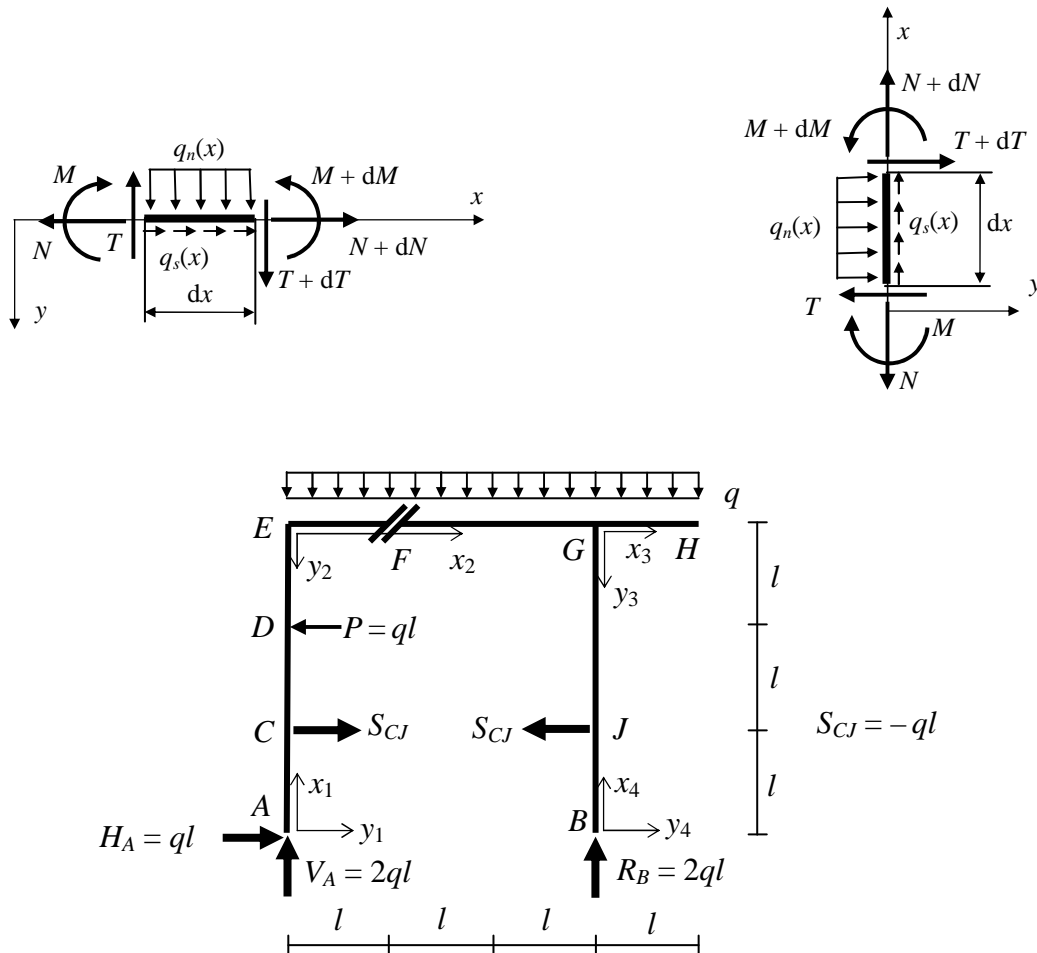
Całka $\int_{x_0}^{x_k} q_n(x) dx$ jest wypadkową obciążenia normalnego $q_n(x)$ działającego w przedziale

$x \in \langle x_0, x_k \rangle$. Obciążenie normalne $q_n(x)$ ma kierunek prostopadły do osi pręta. Wartość tego obciążenia jest dodatnia, gdy jego zwrot jest zgodny ze zwrotem osi y .

Całkę $\int_{x_0}^{x_k} T(x) dx$ w przedziale $x \in \langle x_0, x_k \rangle$ możemy wyznaczyć korzystając z definicji całki

oznaczonej, jako pole pod wykresem siły tnącej w tym przedziale.

Stosowanie tego sposobu wymaga przestrzegania przyjętych zwrotów sił przekrojowych, zwrotów obciążenia ciągłego oraz zwrotów osi. W przypadku pręta o osi pionowej wystarczy rysunek ze strony 15 obrócić o kąt 90° .



Przedział A-C, $x_1 \in \langle 0, l \rangle$, $q_n = q_s = 0$, $N(x_1) = \text{const}$, $T(x_1) = \text{const}$

$$N(x_1 = 0) = -V_A = -(2ql) \Rightarrow N(x_1 = 0) = -2ql$$

$$N(x_1 = l) = N(x_1 = 0) - \int_0^l q_s(x) dx = -2ql - 0 \cdot l = -2ql \Rightarrow N(x_1 = l) = -2ql$$

$$T(x_1 = 0) = -H_A = -(ql) \Rightarrow T(x_1 = 0) = -ql$$

$$T(x_1 = l) = T(x_1 = 0) - \int_0^l q_n(x) dx = -ql - 0 \cdot l = -ql \Rightarrow T(x_1 = l) = -ql$$

$$M(x_1 = 0) = 0$$

$$M(x_1 = l) = M(x_1 = 0) + \int_0^l T(x) dx = 0 + (-ql) \cdot l = -ql^2 \Rightarrow M(x_1 = l) = -ql^2$$

Momenty ujemne rozciągają lewe włókna.

Przedział C-D, $x_1 \in \langle l, 2l \rangle$, $q_n = q_s = 0$, $N(x_1) = \text{const}$, $T(x_1) = \text{const}$

$$N(x_1 = l) = -V_A = -(2ql) \Rightarrow N(x_1 = l) = -2ql$$

$$N(x_1 = 2l) = N(x_1 = l) - \int_l^{2l} q_s(x) dx = -2ql - 0 \cdot (2l - l) = -2ql \Rightarrow N(x_1 = 2l) = -2ql$$

$$T(x_1 = l) = -H_A - S_{CJ} = -(ql) - (-ql) \Rightarrow T(x_1 = l) = 0$$

$$T(x_1 = 2l) = T(x_1 = l) - \int_l^{2l} q_n(x) dx = 0 - 0 \cdot (2l - l) = 0 \Rightarrow T(x_1 = 2l) = 0$$

$$M(x_1 = l) = -ql^2$$

$$M(x_1 = 2l) = M(x_1 = l) + \int_l^{2l} T(x) dx = -ql^2 + 0 \cdot (2l - l) = -ql^2 \Rightarrow M(x_1 = 2l) = -ql^2$$

Momenty ujemne rozciągają lewe włókna.

Przedział D-E, $x_1 \in \langle 2l, 3l \rangle$, $q_n = q_s = 0$, $N(x_1) = \text{const}$, $T(x_1) = \text{const}$

$$N(x_1 = 2l) = -V_A = -(2ql) \Rightarrow N(x_1 = 2l) = -2ql$$

$$N(x_1 = 3l) = N(x_1 = 2l) - \int_{2l}^{3l} q_s(x) dx = -2ql - 0 \cdot (3l - 2l) = -2ql \Rightarrow N(x_1 = 3l) = -2ql$$

$$T(x_1 = 2l) = -H_A - S_{CJ} + P = -(ql) - (-ql) + ql = ql \Rightarrow T(x_1 = 2l) = ql$$

$$T(x_1 = 3l) = T(x_1 = 2l) - \int_{2l}^{3l} q_n(x) dx = ql - 0 \cdot (3l - 2l) = ql \Rightarrow T(x_1 = 3l) = ql$$

$$M(x_1 = 2l) = -ql^2$$

$$M(x_1 = 3l) = M(x_1 = 2l) + \int_{2l}^{3l} T(x) dx = -ql^2 + ql \cdot (3l - 2l) = 0 \Rightarrow M(x_1 = 3l) = 0$$

Momenty ujemne rozciągają lewe włókna.

Przedział E-G, $x_2 \in \langle 0, 3l \rangle$, $q_n = q$, $q_s = 0$, $N(x_2) = \text{const}$

$$N(x_2 = 0) = -H_A - S_{CJ} + P = -(ql) - (-ql) + ql \Rightarrow N(x_2 = 0) = ql$$

$$N(x_2 = 3l) = N(x_2 = 0) - \int_0^{3l} q_s(x) dx = ql - 0 \cdot (3l - 0) = ql \Rightarrow N(x_2 = 3l) = ql$$

$$T(x_2 = 0) = V_A = 2ql \Rightarrow T(x_2 = 0) = 2ql$$

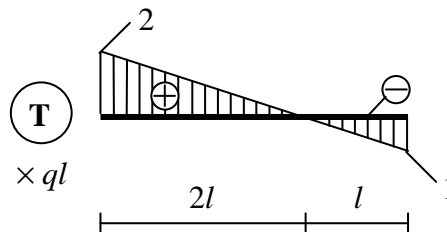
$$T(x_2 = 3l) = T(x_2 = 0) - \int_0^{3l} q_n(x) dx = 2ql - q \cdot (3l - 0) = -ql \Rightarrow T(x_2 = 3l) = -ql$$

W przedziale $E-G$ działa obciążenie normalne $q_n = q = \text{const}$. Wynika stąd, że siła tnąca zmienia się liniowo. Skoro $T(x_2 = 0) > 0$ a $T(x_2 = 3l) < 0$, to w rozważanym przedziale występuje przekrój, w którym siła tnąca ma wartość zerową. Współrzędną określającą położenie tego przekroju możemy wyznaczyć dzieląc wartość siły tnącej na początku przedziału przez natężenie obciążenia q_n .

$$x_{2_0} = \frac{T(x_2 = 0)}{q_n} = \frac{2ql}{q} = 2l$$

Ten sposób można stosować **wyłącznie** w przypadku stałego natężenia obciążenia q_n . Wykonamy sprawdzenie.

$$T(x_{2_0} = 2l) = T(x_2 = 0) - \int_0^{x_{2_0}=2l} q_n(x) dx = 2ql - q \cdot (2l - 0) = 0 \Rightarrow T(x_{2_0} = 2l) = 0$$



Wyznaczamy rzędne wykresu momentu gnącego w przedziale $E-G$. Z równania równowagi momentów w węźle E wynika, że

$$M(x_1 = 3l) = M(x_2 = 0) \Rightarrow M(x_2 = 0) = 0$$

$$M(x_2 = 2l) = M(x_2 = 0) + \int_0^{2l} T(x) dx = 0 + \int_0^{2l} T(x) dx = \int_0^{2l} T(x) dx$$

Całkę $\int_0^{2l} T(x) dx$ możemy wyznaczyć korzystając z definicji całki oznaczonej, jako pole pod

wykresem siły tnącej (pole trójkąta) w przedziale $x \in \langle 0, 2l \rangle$.

$$M(x_2 = 2l) = \frac{1}{2} \cdot 2ql \cdot 2l = 2ql^2 = M_{\text{ekstr.}} \Rightarrow M(x_2 = 2l) = M_{\text{ekstr.}} = 2ql^2$$

W przekroju, w którym zeruje się siła tnąca występuje ekstremum na wykresie momentu (styczna do wykresu momentu gnącego jest równoległa do osi pręta).

$$\begin{aligned} M(x_2 = 3l) &= M(x_2 = 2l) + \int_{2l}^{3l} T(x) dx = 2ql^2 + \int_{2l}^{3l} T(x) dx = 2ql^2 + \frac{1}{2} \cdot (-ql) \cdot l = \left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot ql^2 = \\ &= \frac{3}{2} ql^2 \Rightarrow M(x_2 = 3l) = \frac{3}{2} ql^2 \end{aligned}$$

Pole pod wykresem siły tnącej opatrzone jest znakiem minus ze względu na ujemne wartości rzędnych wykresu siły tnącej w przedziale $2l \leq x_2 \leq 3l$.
Momenty dodatnie rozciągają dolne włókna.

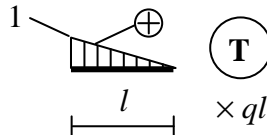
Przedział G-H, $x_3 \in \langle 0, l \rangle$, $q_n = q$, $q_s = 0$, $N(x_3) = \text{const}$

$$N(x_3 = 0) = 0$$

$$N(x_3 = l) = N(x_3 = 0) - \int_0^l q_s(x) dx = 0 - 0 \cdot (l - 0) = 0 \Rightarrow N(x_3 = l) = 0$$

$$T(x_3 = 0) = q \cdot l = ql \Rightarrow T(x_3 = 0) = ql$$

$$T(x_3 = l) = T(x_3 = 0) - \int_0^l q_n(x) dx = ql - q \cdot (l - 0) = 0 \Rightarrow T(x_3 = l) = 0$$



Wyznaczamy rzędne wykresu momentu gnącego w przedziale G-H. Z równania równowagi momentów w węźle H mamy

$$M(x_3 = 0) = -\frac{1}{2} ql^2$$

$$M(x_3 = l) = M(x_3 = 0) + \int_0^l T(x) dx = -\frac{1}{2} ql^2 + \int_0^l T(x) dx = -\frac{1}{2} ql^2 + \frac{1}{2} \cdot (ql) \cdot l =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot ql^2 = 0 \Rightarrow M(x_3 = l) = 0$$

Na prawym końcu rygła siła tnąca ma wartość zerową. Oznacza to, że występuje tam ekstremum na wykresie momentu gnącego (styczna do wykresu momentu gnącego jest równoległa do osi pręta).

$$M(x_3 = l) = M_{\text{ekstr.}} = 0$$

Momenty ujemne rozciągają górne włókna.

Przedział B-J, $x_4 \in \langle 0, l \rangle$, $q_n = q_s = 0$, $N(x_4) = \text{const}$, $T(x_4) = \text{const}$

$$N(x_4 = 0) = -V_B = -(2ql) = -2ql \Rightarrow N(x_4 = 0) = -2ql$$

$$N(x_4 = l) = N(x_4 = 0) - \int_0^l q_s(x) dx = -2ql - 0 \cdot (l - 0) = -2ql \Rightarrow N(x_4 = l) = -2ql$$

$$T(x_4 = 0) = 0$$

$$T(x_4 = l) = T(x_4 = 0) - \int_0^l q_n(x) dx = 0 - 0 \cdot (l - 0) = 0 \Rightarrow T(x_4 = l) = 0$$

$$M(x_4 = 0) = 0$$

$$M(x_4 = l) = M(x_4 = 0) + \int_0^l T(x) dx = 0 + 0 \cdot (l - 0) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow M(x_4 = l) = 0$$

Przedział J-G, $x_4 \in \langle l, 3l \rangle$, $q_n = q_s = 0$, $N(x_4) = \text{const}$, $T(x_4) = \text{const}$

$$N(x_4 = 0) = -V_B = -(2ql) = -2ql \Rightarrow N(x_4 = 0) = -2ql$$

$$N(x_4 = 3l) = N(x_4 = 0) - \int_l^{3l} q_s(x) dx = -2ql - 0 \cdot (3l - l) = -2ql \Rightarrow N(x_4 = l) = -2ql$$

$$T(x_4 = l) = S_{CJ} = (-ql) = -ql \Rightarrow T(x_4 = l) = -ql$$

$$T(x_4 = 3l) = T(x_4 = l) - \int_l^{3l} q_n(x) dx = -ql - 0 \cdot (3l - l) = 0 \Rightarrow T(x_4 = 3l) = -ql$$

Z równania równowagi momentów w węźle J mamy

$$M(x_4 = l) = 0$$

$$M(x_4 = 3l) = M(x_4 = l) + \int_l^{3l} T(x) dx = 0 + (-ql) \cdot (3l - l) = 0 - 2ql^2 = -2ql^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(x_4 = 3l) = -2ql^2$$

Momenty ujemne rozciągają włókna z lewej strony.

Rzędne wykresów sił przekrojowych otrzymane obiema metodami są identyczne.