

Rysując oddziaływania w przegubach D , E i C oraz siłę w pręcie $D-F$ musimy pamiętać o zasadzie działania i przeciwdziałania.

Z równania sumy momentów zapisanego dla podkadładu I wyznaczamy siłę w pręcie $D-F$.

$$\sum_i M_{iC}^I = 0 \Leftrightarrow S_{DF} \cdot \sqrt{2}l + ql \cdot l = 0 \Rightarrow S_{DF} = -\frac{ql^2}{\sqrt{2}l} \Rightarrow S_{DF} = -\frac{\sqrt{2}}{2}ql$$

Ujemna wartość siły S_{DF} świadczy o tym, że pręt $D-F$ jest ściskany. Z równań sumy rzutów sił na oś x i y dla górnego podkadładu obliczamy wartości składowych oddziaływania w przegubie C .

$$\begin{aligned} \sum_i P_{iy}^I = 0 &\Leftrightarrow V_C - S_{DF} \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow V_C = S_{DF} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}ql\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow V_C = -\frac{1}{2}ql \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i P_{ix}^I = 0 &\Leftrightarrow H_C - S_{DF} \cdot \cos 45^\circ - ql = 0 \Rightarrow H_C = S_{DF} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + ql = \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}ql\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + ql = \frac{1}{2}ql \Rightarrow H_C = \frac{1}{2}ql \end{aligned}$$

Z równania sumy momentów dla II podkadładu wyznaczamy reakcję H_A .

$$\sum_i M_{iE}^{II} = 0 \Leftrightarrow H_A \cdot l - V_A \cdot l - S_{DF} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot l + q \cdot l \cdot \frac{1}{2} l = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_A = V_A + S_{DF} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} ql = \frac{9}{4} ql + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ql \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} ql = \frac{5}{4} ql \Rightarrow H_A = \frac{5}{4} ql$$

Z równania sumy rzutów sił na oś x dla całego układu obliczamy wartość reakcji podpory B .

$$\sum_i P_{ix} = 0 \Leftrightarrow H_A - R_B - ql = 0 \Rightarrow R_B = H_A - ql = \frac{5}{4} ql - ql = \frac{1}{4} ql \Rightarrow R_B = \frac{1}{4} ql$$

Następnie wyznaczamy wartości składowych oddziaływania w przegubie E .

$$\sum_i P_{ix}^{II} = 0 \Leftrightarrow H_A + S_{DF} \cdot \cos 45^\circ + H_E = 0 \Rightarrow H_E = -S_{DF} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - H_A =$$

$$= -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ql \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{4} ql = -\frac{3}{4} ql \Rightarrow H_E = -\frac{3}{4} ql$$

$$\sum_i P_{iy}^{II} = 0 \Leftrightarrow V_A + S_{DF} \cdot \cos 45^\circ - q \cdot l - V_E = 0 \Rightarrow V_E = V_A + S_{DF} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - ql =$$

$$= \frac{9}{4} ql + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ql \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - ql = \frac{3}{4} ql \Rightarrow V_E = \frac{3}{4} ql$$

Sprawdzamy poprawność wartości wyznaczonych oddziaływań zapisując równania równowagi dla III podukładu. Równania te wcześniej nie były wykorzystane.

$$\sum_i P_{ix}^{III} = -R_B - H_C - H_E = -\frac{1}{4} ql - \frac{1}{2} ql - \left(-\frac{3}{4} ql \right) = -\frac{1}{4} ql - \frac{1}{2} ql + \frac{3}{4} ql \equiv 0$$

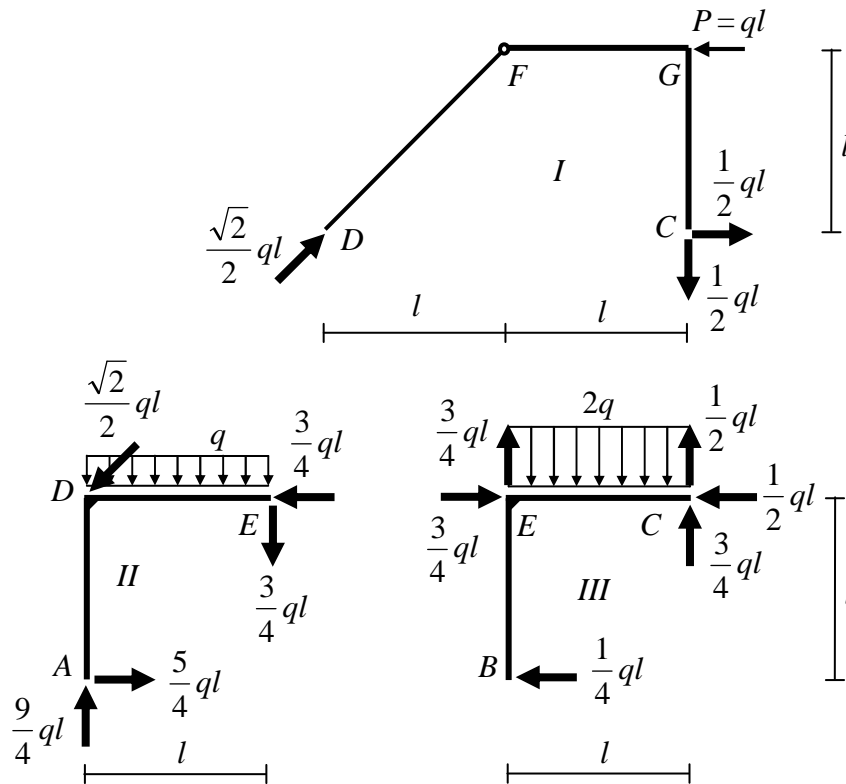
$$\sum_i P_{iy}^{III} = R_C + V_E - V_C - 2ql = \frac{3}{4} ql + \frac{3}{4} ql - \left(-\frac{1}{2} ql \right) - 2ql = \frac{3}{4} ql + \frac{3}{4} ql + \frac{1}{2} ql - 2ql \equiv 0$$

$$\sum_i M_{iE}^{III} = R_C \cdot l - V_C \cdot l - R_B \cdot l - 2q \cdot l \cdot \frac{1}{2} l = \frac{3}{4} ql \cdot l - \left(-\frac{1}{2} ql \right) \cdot l - \frac{1}{4} ql \cdot l - ql^2 =$$

$$= \frac{3}{4} ql \cdot l + \frac{1}{2} ql \cdot l - \frac{1}{4} ql \cdot l - ql^2 \equiv 0$$

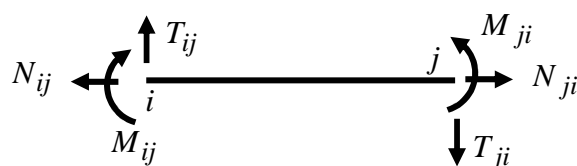
Równania równowagi spełnione są tożsamościowo.

W celu wykonania wykresów sił przekrojowych rysujemy podukłady z wyznaczonymi reakcjami i oddziaływaniami. W przypadku wartości ujemnych zmienimy zwroty sił.

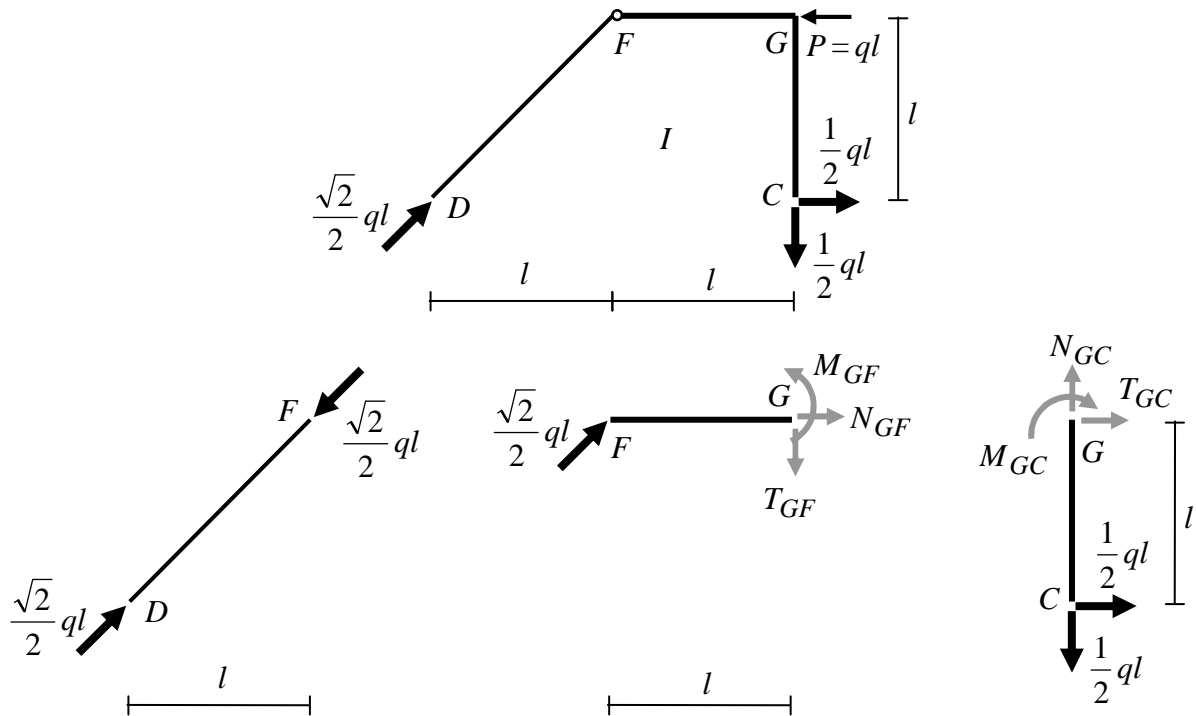


Po wyznaczeniu wartości reakcji oraz oddziaływań możemy przystąpić do wykonania wykresów sił przekrojowych. Tylko dwa pręty układu obciążone są obciążeniem ciągłym normalnym. W przypadku pręta DE jest to $q_n = q$, natomiast dla pręta EC przyjmuje wartość $q_n = 2q$. Obciążenie styczne w rozważanym układzie nie występuje ($q_s = 0$). Wynika stąd, że wykres siły normalnej w każdym przedziale ma stałe rzędne. Podobnie na wykresie siły tnącej w przedziałach, w których nie występuje obciążenie normalne, rzędne mają stałą wartość. Jedynie w przedziałach $D-E$ i $E-C$ wykresy siły tnącej są liniowe. Uwzględniając zależności różniczkowe możemy stwierdzić, że w przedziałach, w których siła tnąca ma stałą wartość, moment gnący zmienia się liniowo, natomiast w przedziałach, w których siła tnąca zmienia się liniowo, wykres momentu gnącego jest paraboliczny. Pręt DF na obu końcach ma przegubowe połączenia i nie jest obciążony obciążeniem zewnętrznym. Na wykresach siły tnącej i momentu gnącego w przedziale $D-F$ rzędne mają wartości zerowe. Na wykresie siły normalnej dla pręta DF rzędne mają wartość siły S_{DF} . W celu narysowania wykresu stałej funkcji wystarczy wyznaczyć jedną rzędną. W przypadku wykresu funkcji liniowej należy wyznaczyć dwie rzędne. Wykres funkcji kwadratowej możemy narysować znając trzy rzędne. W szczególnym przypadku możemy sporządzić wykres paraboli znając dwie rzędne, o ile jedna z nich stanowi ekstremum.

W celu jednoznacznego i precyzyjnego określenia przekrojów oraz działających w nich sił przekrojowych w odniesieniu do poszczególnych prętów (przedziałów) przyjmujemy oznaczenia zgodnie z poniższym rysunkiem. Na poniższym rysunku siły mają zwroty dodatnich sił normalnych i tnących.



Pierwszy indeks oznacza, w którym przekroju działają siły przekrojowe, natomiast oba indeksy wskazują rozpatrywany pręt (przedział).



Siła $P = ql$ przyłożona do węzła G będzie uwzględniona przy sprawdzeniu równowagi tego węzła.

Przedział D-F

$$N_{DF} = N_{FD} = -\frac{\sqrt{2}}{2} ql \quad T_{DF} = T_{FD} = 0 \quad M_{DF} = M_{FD} = 0$$

Przedział F-G

$$\sum_i P_{ix}^{FG} = 0 \Leftrightarrow N_{FG} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} ql \Rightarrow N_{FG} = -\frac{1}{2} ql$$

$$\sum_i P_{iy}^{FG} = 0 \Leftrightarrow T_{FG} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} ql \Rightarrow T_{FG} = \frac{1}{2} ql$$

$$M_{FG} = 0$$

$$N_{GF} = N_{FG} \Rightarrow N_{GF} = -\frac{1}{2} ql$$

$$T_{GF} = T_{FG} \Rightarrow T_{GF} = \frac{1}{2} ql$$

$$\sum_i M_{iF}^{FG} = 0 \Leftrightarrow M_{GF} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-S_{DF}) \cdot l = 0 \Rightarrow M_{GF} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot S_{DF} \cdot l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{GF} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ql\right) \cdot l = \frac{1}{2} ql^2 \Rightarrow M_{GF} = \frac{1}{2} ql^2$$

Przedział C-G

$$N_{CG} = -V_C \Rightarrow N_{CG} = -\left(-\frac{1}{2} ql\right) = \frac{1}{2} ql \Rightarrow N_{CG} = \frac{1}{2} ql$$

$$T_{CG} = -H_C \Rightarrow T_{CG} = -\left(\frac{1}{2} ql\right) = -\frac{1}{2} ql \Rightarrow T_{CG} = -\frac{1}{2} ql$$

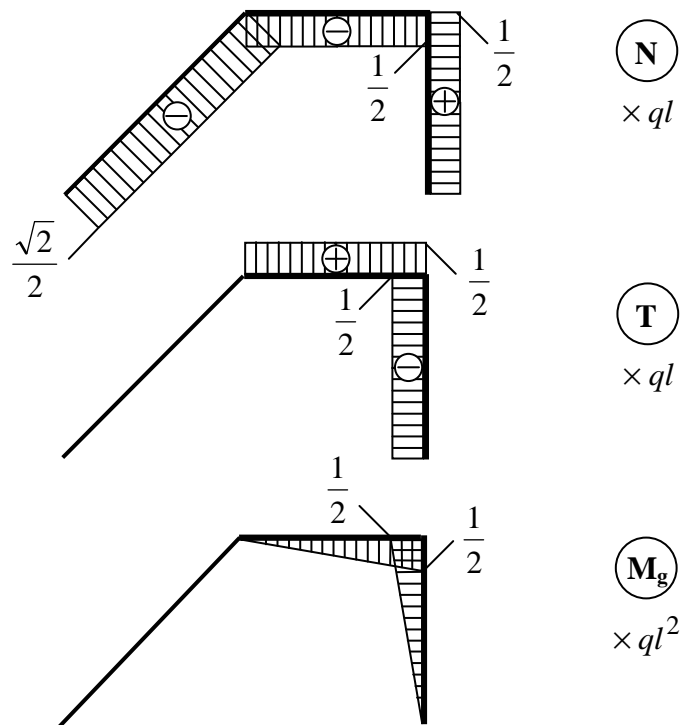
$$M_{CG} = 0$$

$$N_{GC} = N_{CG} = \frac{1}{2} ql \Rightarrow N_{GC} = \frac{1}{2} ql$$

$$T_{GC} = T_{CG} = -\frac{1}{2} ql \Rightarrow T_{GC} = -\frac{1}{2} ql$$

$$\sum_i M_{iG}^{CG} = 0 \Leftrightarrow -M_{GC} + H_C \cdot l = -M_{GC} + \frac{1}{2} ql \cdot l = 0 \Rightarrow M_{GC} = \frac{1}{2} ql^2$$

Wykonamy wykresy sił przekrojowych dla części górnej (I) rozwiązywanej ramy.

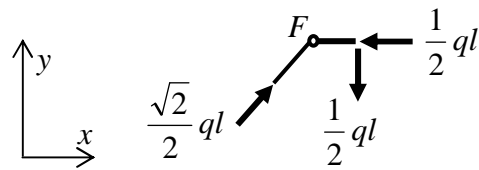


Sprawdzamy równowagę węzłów F i G. Wprowadzamy „myślowo” przekroje nieskończenie blisko węzłów. W tych przekrojach zaznaczamy obliczone wartości sił przekrojowych i zapisujemy równania równowagi. Rysunki węzłów z siłami przekrojowymi wykonane są z podziałem na siły normalne i tnące oraz momenty gnące w celu zapewnienia większej przejrzystości rysunku.

Węzeł przegubowy F

$$\sum_i P_{ix}^F = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} ql - \frac{1}{2} ql \equiv 0$$

$$\sum_i P_{iy}^F = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} ql - \frac{1}{2} ql \equiv 0$$

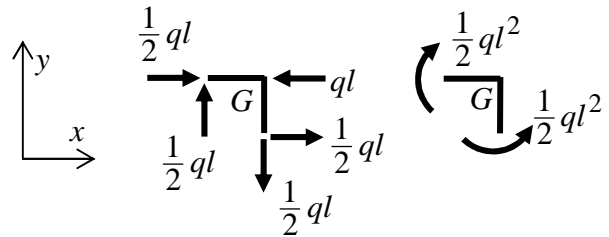


Węzeł sztywny G

$$\sum_i P_{ix}^G = \frac{1}{2} ql + \frac{1}{2} ql - ql \equiv 0$$

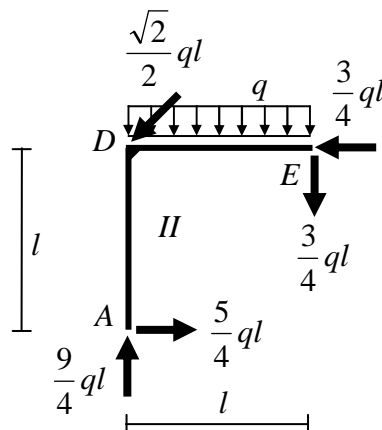
$$\sum_i P_{iy}^G = \frac{1}{2} ql - \frac{1}{2} ql \equiv 0$$

$$\sum_i M_i^G = \frac{1}{2} ql^2 - \frac{1}{2} ql^2 \equiv 0$$

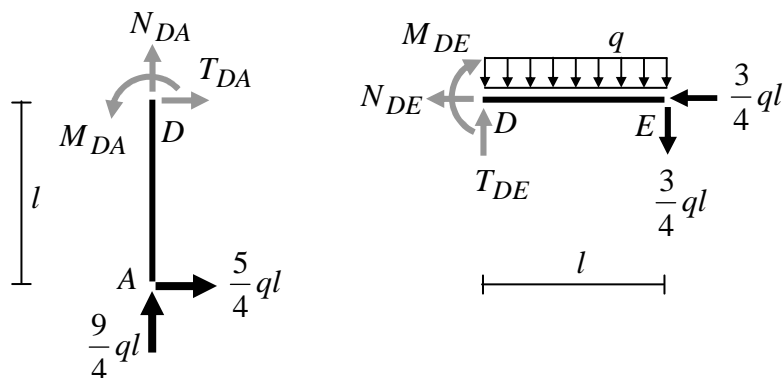


Równania równowagi spełnione są tożsamościowo.

Wykonujemy wykresy sił przekrojowych dla części II rozwiązywanej ramy.



Siła S_{DF} przyłożona do węzła D będzie uwzględniona przy sprawdzeniu równowagi tego węzła.



Przedział A-D

$$N_{AD} = -V_A = -\frac{9}{4} ql \Rightarrow N_{AD} = -\frac{9}{4} ql$$

$$T_{AD} = -H_A = -\frac{5}{4}ql \Rightarrow T_{AD} = -\frac{5}{4}ql$$

$$M_{AD} = 0$$

W przypadku pręta AD $q_n = q_s = 0$. Wynika stąd, że wykresy siły normalnej i tnącej mają stałe rzędne. Wykres momentu gnącego jest liniowy.

$$N_{DA} = N_{AD} \Rightarrow N_{DA} = -\frac{9}{4}ql$$

$$T_{DA} = T_{AD} \Rightarrow T_{DA} = -\frac{5}{4}ql$$

$$\sum_i M_{iD}^{AD} = 0 \Leftrightarrow M_{DA} + H_A \cdot l = 0 \Rightarrow M_{DA} + \frac{5}{4}ql \cdot l = 0 \Rightarrow M_{DA} = -\frac{5}{4}ql^2$$

Ujemna wartość momentu M_{DA} oznacza, że rozciągane są włókna z lewej strony.

Przedział D-E

$$N_{ED} = H_E = -\frac{3}{4}ql \Rightarrow N_{ED} = -\frac{3}{4}ql$$

$$T_{ED} = V_E = \frac{3}{4}ql \Rightarrow T_{ED} = \frac{3}{4}ql$$

$$M_{ED} = 0$$

Dla pręta DE $q_n = q$, natomiast $q_s = 0$. Wynika stąd, że wykres siły normalnej ma stałe rzędne. Wykres siły tnącej jest liniowy.

$$N_{DE} = N_{ED} \Rightarrow N_{DE} = -\frac{3}{4}ql$$

$$\sum_i P_{iy}^{DE} = 0 \Leftrightarrow T_{DE} - q \cdot l - V_E = 0 \Rightarrow T_{DE} = ql + \frac{3}{4}ql \Rightarrow T_{DE} = \frac{7}{4}ql$$

$$\sum_i M_{iD}^{DE} = 0 \Leftrightarrow -M_{DE} - q \cdot l \cdot \frac{1}{2}l - V_E \cdot l = 0 \Rightarrow M_{DE} = -\frac{1}{2}ql^2 - \frac{3}{4}ql^2 = -\frac{5}{4}ql^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{DE} = -\frac{5}{4}ql^2$$

Wykres momentu gnącego jest paraboliczny. Ujemna wartość momentu M_{DE} oznacza, że rozciągane są włókna górne. Należy zwrócić uwagę, że tnąca nie zeruje się w żadnym przekroju w przedziale $D-E$. Oznacza to, że na wykresie momentu gnącego nie występuje ekstremum. W przypadku wątpliwości odnośnie kształtu tego wykresu można wyznaczyć funkcję momentu, a następnie obliczyć wartość rzędnej na przykład w połowie przedziału $D-E$.

Po przekształceniu zależności różniczkowych otrzymujemy wzory na wartości funkcji sił przekrojowych $T(x_k)$ i $M(x_k)$ w przekroju o współrzędnej x_k należącej do rozważanego przedziału. Korzystając z nich możemy sprawdzić wcześniejsze obliczenia.

$$\frac{dT}{dx} = -q_n(x) \Rightarrow dT = -q_n(x)dx \Rightarrow dT|_{x_0}^{x_k} = -\int_{x_0}^{x_k} q_n(x)dx \Rightarrow T|_{x_0}^{x_k} = -\int_{x_0}^{x_k} q_n(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x_k) - T(x_0) = -\int_{x_0}^{x_k} q_n(x)dx \Rightarrow T(x_k) = T(x_0) - \int_{x_0}^{x_k} q_n(x)dx$$

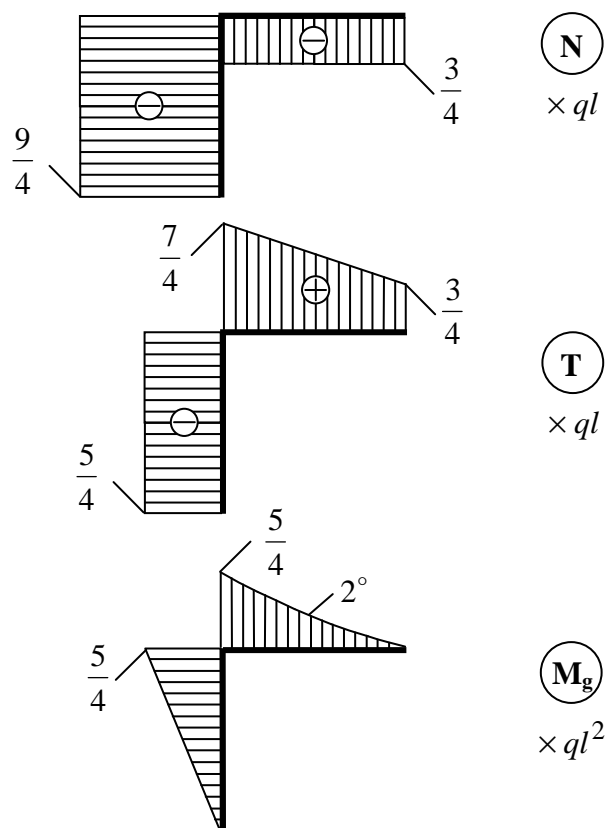
$$T_{ED} = T_{DE} - q \cdot l = \frac{7}{4}ql - ql = \frac{3}{4}ql$$

$$\frac{dM}{dx} = T(x) \Rightarrow dM = T(x)dx \Rightarrow dM|_{x_0}^{x_k} = \int_{x_0}^{x_k} T(x)dx \Rightarrow M|_{x_0}^{x_k} = \int_{x_0}^{x_k} T(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(x_k) - M(x_0) = \int_{x_0}^{x_k} T(x)dx \Rightarrow M(x_k) = M(x_0) + \int_{x_0}^{x_k} T(x)dx$$

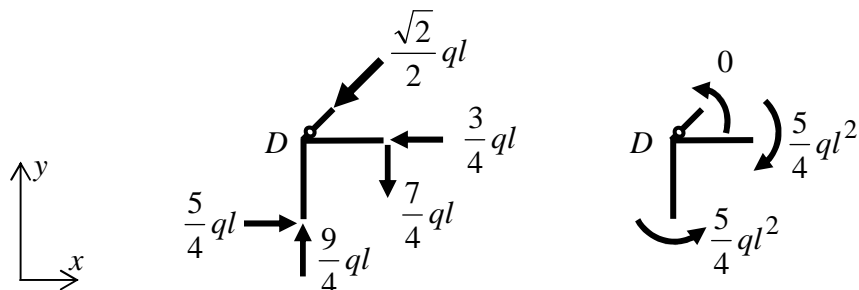
$$M_{ED} = M_{DE} + \frac{1}{2} \left(\frac{7}{4}ql + \frac{3}{4}ql \right) \cdot l = -\frac{5}{4}ql^2 + \frac{5}{4}ql^2 = 0$$

Wykonujemy wykresy sił przekrojowych dla części II rozwiązywanej ramy.



Sprawdzamy równowagę węzła D . Wprowadzamy „myślowo” przekroje nieskończenie blisko węzłów. W tych przekrojach zaznaczamy obliczone wartości sił przekrojowych i zapisujemy równania równowagi. Rysunki węzłów z siłami przekrojowymi wykonane są z podziałem na siły normalne i tnące oraz momenty gnące w celu zapewnienia większej przejrzystości rysunku.

Węzeł D



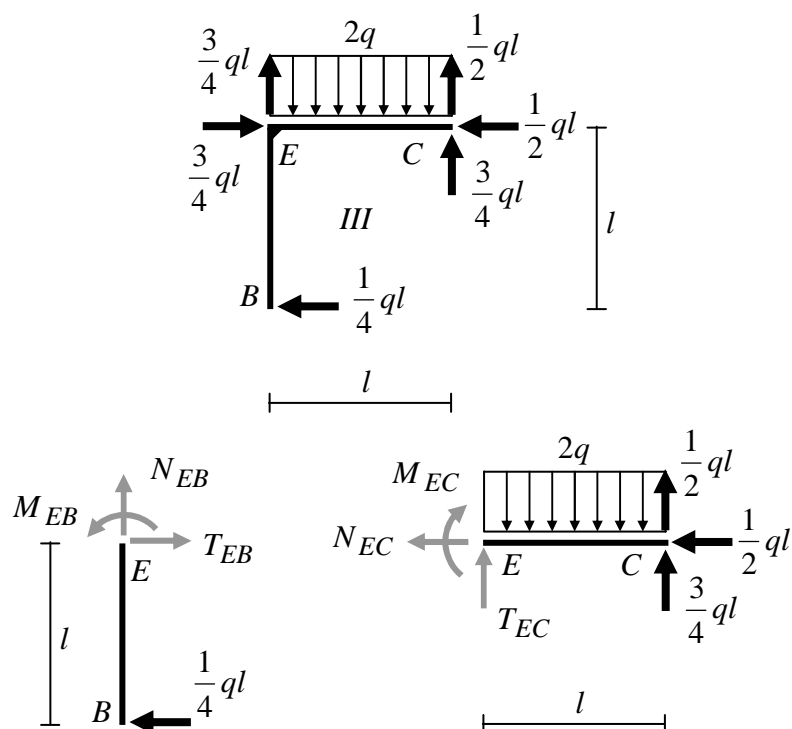
$$\sum_i P_{ix}^D = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} ql + \frac{5}{4} ql - \frac{3}{4} ql \equiv 0$$

$$\sum_i P_{iy}^D = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} ql + \frac{9}{4} ql - \frac{7}{4} ql \equiv 0$$

$$\sum_i M_i^D = \frac{5}{4} ql^2 - \frac{5}{4} ql^2 + 0 ql^2 \equiv 0$$

Równania równowagi spełnione są tożsamościowo.

Przystępujemy do wykonania wykresów sił przekrojowych dla części III rozwiązywanej ramy. Oddziaływania w przegubie E (połączenie części II i III) uwzględnimy rozważając równowagę sztywnego węzła E (połączenie prętów BE i EC).



Przedział B-E

$$N_{BE} = 0$$

$$T_{BE} = R_B = \frac{1}{4}ql = 0 \Rightarrow T_{BE} = \frac{1}{4}ql$$

$$M_{BE} = 0$$

W przypadku pręta BE $q_n = q_s = 0$. Wynika stąd, że wykresy siły normalnej i tnącej mają stałe rzędne. Wykres momentu gnącego jest liniowy. W miejscu podpory B moment ma wartość zerową.

$$N_{EB} = N_{BE} = 0$$

$$T_{EB} = T_{BE} = \frac{1}{4}ql$$

$$\sum_i M_{iE}^{BE} = 0 \Leftrightarrow M_{EB} - R_B \cdot l = 0 \Rightarrow M_{EB} = R_B \cdot l = \frac{1}{4}ql \cdot l = \frac{1}{4}ql^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{EB} = \frac{1}{4}ql^2$$

Dodatnia wartość momentu M_{EB} oznacza, że rozciągane są włókna prawe.

Przedział E-C

W punkcie C poza oddziaływaniami H_C i V_C działa również reakcja R_C .

$$N_{CE} = -H_C \Rightarrow N_{CE} = -\frac{1}{2}ql$$

$$T_{CE} = V_C - R_C = -\frac{1}{2}ql - \frac{3}{4}ql \Rightarrow T_{CE} = -\frac{5}{4}ql$$

$$M_{CE} = 0$$

W przypadku pręta EC $q_s = 0$. Wynika stąd, że wykresy siły normalnej ma stałe rzędne.

$$N_{EC} = N_{CE} = -\frac{1}{2}ql \Rightarrow N_{EC} = -\frac{1}{2}ql$$

$$\sum_i P_{iy}^{EC} = 0 \Leftrightarrow T_{EC} - 2q \cdot l - T_{CE} = 0 \Rightarrow T_{EC} = T_{CE} + 2ql = -\frac{5}{4}ql + 2ql = \frac{3}{4}ql \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{EC} = \frac{3}{4}ql$$

$$\sum_i M_{iC}^{EC} = 0 \Leftrightarrow -M_{EC} - T_{EC} \cdot l + 2q \cdot l \cdot \frac{1}{2}ql = 0 \Rightarrow M_{EC} = -T_{EC} \cdot l + ql^2 =$$

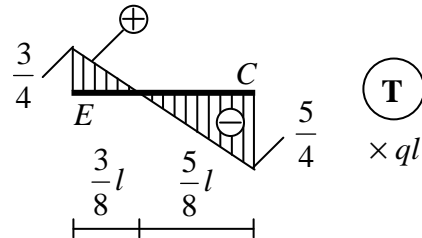
$$= -\frac{3}{4}ql \cdot l + ql^2 = \frac{1}{4}ql^2 \Rightarrow M_{EC} = \frac{1}{4}ql^2$$

Moment M_{EC} ma wartość dodatnią, czyli rozciąga włókna dolne.

W przedziale $E-C$ $q_n = 2q$. Wynika stąd, że wykres siły tnącej jest liniowy. Wartości siły tnącej na początku i na końcu przedziału $E-C$ mają różne znaki. W przekroju, w którym siła

tnąca ma wartość zerową, moment osiąga wartość ekstremalną. Współrzędna tego przekroju wyznaczona jest poniżej.

$$x_0 = \frac{T_{EC}}{q_n} = \frac{\frac{3}{4}ql}{2q} = \frac{3}{8}l$$

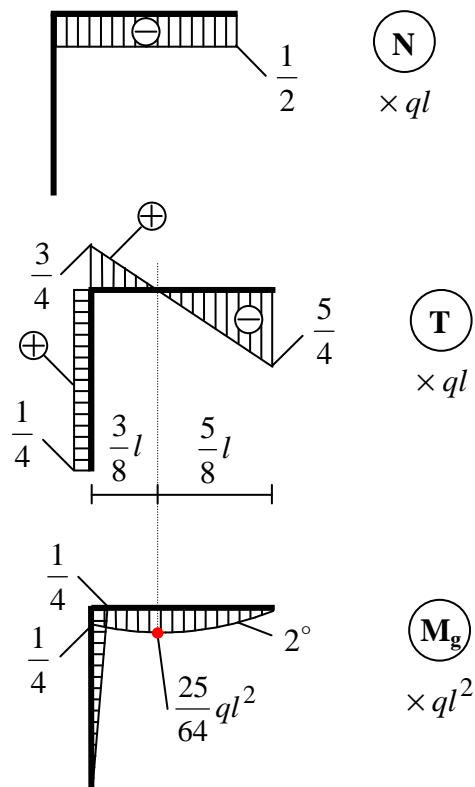


Wykres momentu gnącego jest paraboliczny. Poza momentem M_{EC} wyznaczamy jeszcze moment ekstremalny oraz w celu wykonania sprawdzenia obliczeń moment M_{CE} .

$$M\left(x = \frac{3}{8}l\right) = M_{\text{ekstr.}} = \frac{1}{4}ql^2 + \int_0^{\frac{3}{8}l} T(x)dx = \frac{1}{4}ql^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}ql \cdot \frac{3}{8}l = \left(\frac{1}{4} + \frac{9}{64}\right) \cdot ql^2 = \frac{25}{64}ql^2$$

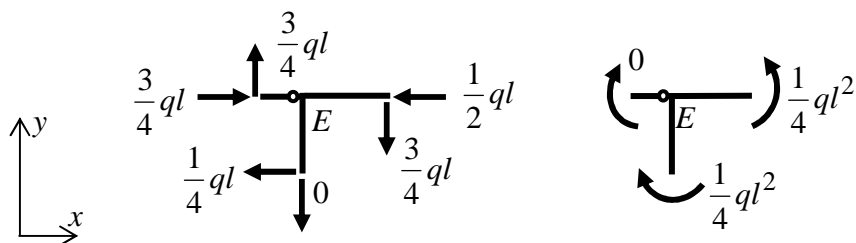
$$M_{CE} = M(x=l) = \frac{25}{64}ql^2 + \int_{\frac{3}{8}l}^l T(x)dx = \frac{25}{64}ql^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{5}{4}ql\right) \cdot \frac{5}{8}l = \left(\frac{25}{64} - \frac{25}{64}\right) \cdot ql^2 = 0$$

Wykonujemy wykresy sił przekrojowych dla części III rozwiązywanej ramy.



Sprawdzamy równowagę węzła E . Wprowadzamy „myślowo” przekroje nieskończenie blisko węzłów. W tych przekrojach zaznaczamy obliczone wartości sił przekrojowych i zapisujemy równania równowagi. Rysunki węzłów z siłami przekrojowymi wykonane są z podziałem na siły normalne i tnące oraz momenty gnące w celu zapewnienia większej przejrzystości rysunku.

Wezeł E



$$\sum_i P_{ix}^E = \frac{3}{4}ql - \frac{1}{4}ql - \frac{1}{2}ql \equiv 0$$

$$\sum_i P_{iy}^E = \frac{3}{4}ql - \frac{3}{4}ql \equiv 0$$

$$\sum_i M_i^E = -0 - \frac{1}{4}ql^2 + \frac{1}{4}ql^2 \equiv 0$$

Równania równowagi spełnione są tożsamościowo.

Zauważmy, że siła tnąca T_{ED} jest równa sile tnącej T_{EC} . Wynika to z poziomego kierunku reakcji podpory B i tym samym z zerowej wartości siły normalnej N_{EB} .

Uwzględniając poniższe zależności różniczkowe

$$\frac{dN}{dx} = -q_s(x) \quad \frac{dT}{dx} = -q_n(x) \quad \text{oraz} \quad \frac{dM}{dx} = T(x)$$

stwierdzamy, że liniowy wykres siły tnącej w przedziale $E-C$ ($q_n = 2q$) musi mieć dwa razy większy tangens kąta nachylenia niż w przedziale $D-E$ ($q_n = q$). Z kolei styczne do wykresu momentu w punkcie E w przedziale $D-E$ oraz $E-C$ muszą być do siebie równoległe ($T_{ED} = T_{EC}$). Wykres momentu gnącego w przedziałach $D-E$ oraz $E-C$ ma różne krzywizny w związku różnymi wartościami natężenia obciążenia ciągłego. Większa krzywizna występuje w przedziale $E-C$. Siły normalne w każdym przedziale mają stałą wartość ($q_s = 0$). Schemat ramy z obciążeniem oraz wykresy sił przekrojowych znajdują się na stronie 14.

Wykresy sił przekrojowych

