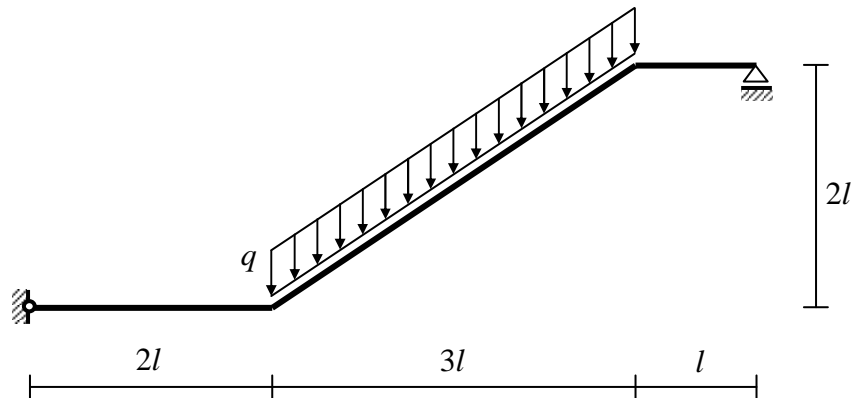
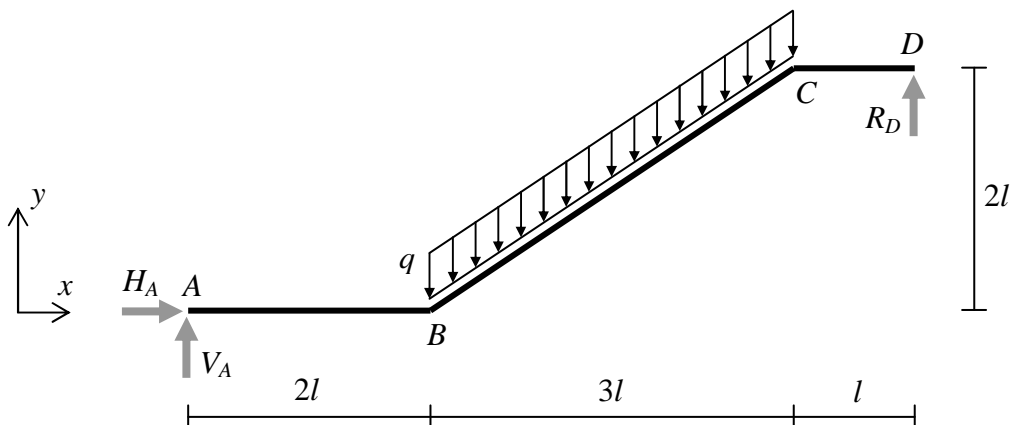


Przykład 8.7. Rama obciążona obciążeniem ciągłym (typ I)

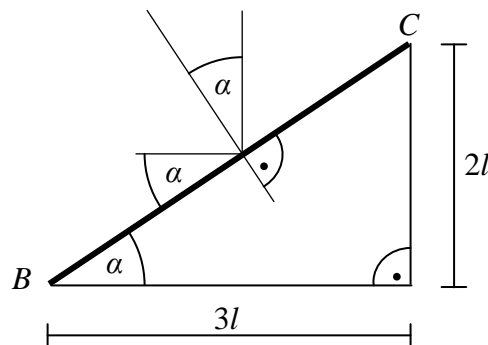
Polecenie: Dla poniższej ramy sporządzić wykresy sił przekrojowych.



Oznaczamy punkty charakterystyczne: podpory A i D oraz węzły sztywne B i C . W układzie oswoobodzonym od więzów podpory zastępujemy reakcjami. Wektory o nieznanych wartościach oznaczamy szarym kolorem. Po wyznaczeniu ich wartości kolor zmieniamy na czarny.



Przed wyznaczeniem reakcji musimy obliczyć długość pręta BC w celu obliczenia wypadkowej obciążenia ciągłego. Obliczamy też wartości funkcji sinus i cosinus kąta α .



$$|\overline{BC}| = \sqrt{(3l)^2 + (2l)^2} = \sqrt{13}l \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}, \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

W rozpatrywanym przykładzie obciążenie zadane jest na jednostkę długości pręta. W takim przypadku wypadkową obliczamy mnożąc natężenie obciążenia przez długość pręta. Zapisujemy równania równowagi.

$$\sum_i P_{ix} = 0 \Leftrightarrow H_A = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_i M_{iA} = 0 &\Leftrightarrow R_D \cdot 6l - q \cdot \sqrt{13} l \cdot \left(2l + \frac{1}{2} \cdot 3l\right) = 0 \Rightarrow R_D = \frac{1}{6l} \cdot \frac{7\sqrt{13}}{2} \cdot ql^2 = \\ &= \frac{7\sqrt{13}}{12} \cdot ql \Rightarrow R_D = \frac{7\sqrt{13}}{12} ql \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i P_{iy} = 0 &\Leftrightarrow V_A + R_D - q \cdot \sqrt{13} l = 0 \Rightarrow V_A = \sqrt{13} ql - R_D = \sqrt{13} ql - \frac{7\sqrt{13}}{12} ql = \\ &= \frac{5\sqrt{13}}{12} ql \Rightarrow V_A = \frac{5\sqrt{13}}{12} ql \end{aligned}$$

W celu sprawdzenia poprawności obliczeń zapisujemy jeszcze równanie momentów względem punktu D .

$$\begin{aligned} \sum_i M_{iD} &= -V_A \cdot 6l + H_A \cdot 2l + q \cdot \sqrt{13} l \cdot \left(l + \frac{1}{2} \cdot 3l\right) = -\frac{5\sqrt{13}}{12} ql \cdot 6l + 0 \cdot 2l + \sqrt{13} ql \cdot \frac{5}{2} l = \\ &= -\frac{5\sqrt{13}}{2} ql^2 + 0 + \frac{5\sqrt{13}}{2} ql^2 \equiv 0 \end{aligned}$$

Równanie spełnione jest tożsamościowo.

Przedział A-B

W rozważanym przedziale nie występuje obciążenie ciągłe ($q_n = q_s = 0$). Siła tnąca i normalna mają stałe wartości. Składowa pozioma reakcji podpory A ma wartość zerową. Składowa pionowa ma zwrot dodatniej siły tnącej. Uwzględniając fakt, że siła tnąca ma stałą wartość, możemy stwierdzić, iż wykres momentu gnącego będzie miał przebieg liniowy. W punkcie A rzędna na wykresie momentu jest równa zero, natomiast w punkcie B wartość rzędnej jest równa momentowi składowej pionowej reakcji podpory A na ramieniu $2l$. Momenty gnące w przedziale A-B powodują rozciąganie dolnych włókien.

$$\begin{aligned} N_{AB} &= H_A = 0 \Rightarrow N_{AB} = 0 \\ T_{AB} &= V_A = \frac{5\sqrt{13}}{12} ql \Rightarrow T_{AB} = \frac{5\sqrt{13}}{12} ql \\ M_{AB} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{BA} &= N_{AB} = 0 \Rightarrow N_{BA} = 0 \\ T_{BA} &= T_{AB} = \frac{5\sqrt{13}}{12} ql \Rightarrow T_{BA} = \frac{5\sqrt{13}}{12} ql \end{aligned}$$

$$M_{BA} = V_A \cdot 2l = \frac{5\sqrt{13}}{12} ql \cdot 2l = \frac{5\sqrt{13}}{6} ql^2 \Rightarrow M_{BA} = \frac{5\sqrt{13}}{6} ql^2$$

Przedział C-D

W rozważanym przedziale nie występuje obciążenie ciągłe ($q_n = q_s = 0$). Siła tnąca i normalna mają stałe wartości. Reakcja podpory D ma kierunek prostopadły do osi pręta CD i zwrot ujemnej siły tnącej. Siła normalna w rozpatrywanym przedziale jest zerowa. Uwzględniając fakt, że siła tnąca ma stałą wartość, możemy stwierdzić, iż wykres momentu gnącego ma przebieg liniowy. W punkcie D rzędna na wykresie momentu jest równa zero, natomiast w punkcie C wartość rzędnej jest równa momentowi reakcji podpory D na ramieniu l . Momenty gnące w przedziale $C-D$ powodują rozciąganie dolnych włókien.

$$N_{DC} = 0$$

$$T_{DC} = -R_D = -\frac{7\sqrt{13}}{12} ql \Rightarrow T_{DC} = -\frac{7\sqrt{13}}{12} ql$$

$$M_{DC} = 0$$

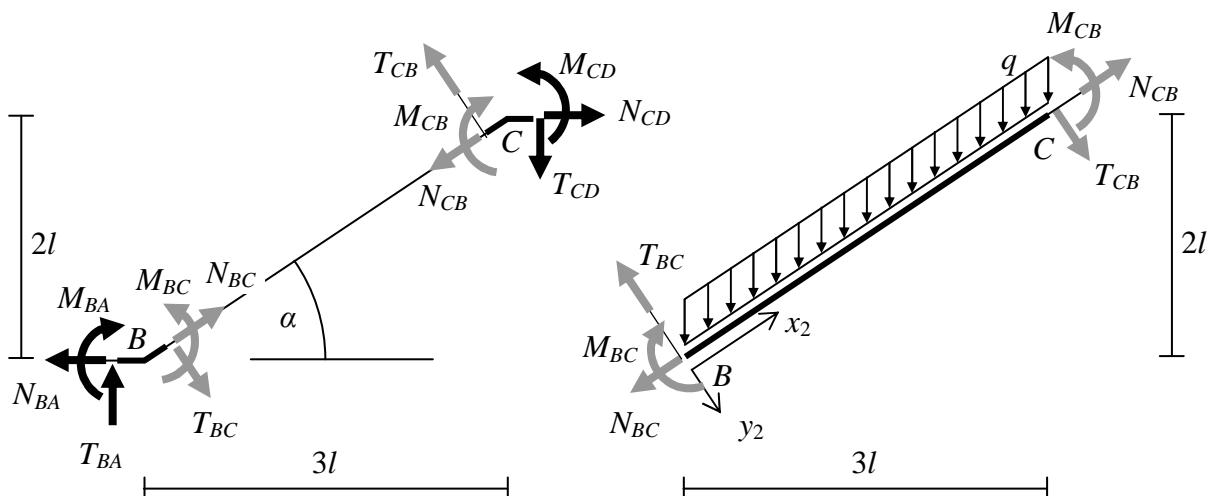
$$N_{CD} = N_{DC} = 0 \Rightarrow N_{CD} = 0$$

$$T_{CD} = T_{DC} = -\frac{7\sqrt{13}}{12} ql \Rightarrow T_{CD} = -\frac{7\sqrt{13}}{12} ql$$

$$M_{CD} = R_D \cdot l = \frac{7\sqrt{13}}{12} ql \cdot l = \frac{7\sqrt{13}}{12} ql^2 \Rightarrow M_{CD} = \frac{7\sqrt{13}}{12} ql^2$$

Przedział B-C

W przedziale tym działa obciążenie ciągłe, które nie ma kierunku prostopadłego do osi pręta. Jest ono zadane na jednostkę długości pręta. Obciążenie to jest sumą geometryczną obciążenia ciągłego stycznego i normalnego. Tym samym wykresy siły normalnej i tnącej są liniowe. W celu narysowania wykresu liniowego wystarczy wyznaczyć dwie rzędne. Z kolei wykres momentu gnącego będzie paraboliczny. Przed wykonaniem tego wykresu wyznaczamy trzy jego rzędne.



Lewa część powyższego rysunku przedstawia siły działające na węzły sztywne B i C , natomiast prawa część pręt BC . W przekrojach znajdujących się nieskończenie blisko węzłów B i C zaznaczone są siły przekrojowe.

Siły normalne wyznaczmy z równań rzutów sił na oś x_2 dla węzłów B i C .

$$\sum_i P_{ix_2}^B = 0 \Leftrightarrow N_{BC} - N_{BA} \cdot \cos\alpha + T_{BA} \cdot \sin\alpha = 0 \Rightarrow N_{BC} = N_{BA} \cdot \cos\alpha - T_{BA} \cdot \sin\alpha =$$

$$= 0 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{5\sqrt{13}}{12} ql \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = -\frac{5}{6} ql \Rightarrow N_{BC} = -\frac{5}{6} ql$$

$$\sum_i P_{ix_2}^C = 0 \Leftrightarrow -N_{CB} + N_{CD} \cdot \cos\alpha - T_{CD} \cdot \sin\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{CB} = N_{CD} \cdot \cos\alpha - T_{CD} \cdot \sin\alpha = 0 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} - \left(-\frac{7\sqrt{13}}{12} ql\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{7}{6} ql \Rightarrow N_{CB} = \frac{7}{6} ql$$

W podobny sposób wyznaczamy siły tnące rzutując siły działające w węzłach B i C na oś y_2 .

$$\sum_i P_{iy_2}^B = 0 \Leftrightarrow T_{BC} - T_{BA} \cdot \cos\alpha - N_{BA} \cdot \sin\alpha = 0 \Rightarrow T_{BC} = T_{BA} \cdot \cos\alpha + N_{BA} \cdot \sin\alpha =$$

$$= \frac{5\sqrt{13}}{12} ql \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} + 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{5}{4} ql \Rightarrow T_{BC} = \frac{5}{4} ql$$

$$\sum_i P_{iy_2}^C = 0 \Leftrightarrow -T_{CB} + T_{CD} \cdot \cos\alpha + N_{CD} \cdot \sin\alpha = 0 \Rightarrow T_{CB} = T_{CD} \cdot \cos\alpha + N_{CD} \cdot \sin\alpha =$$

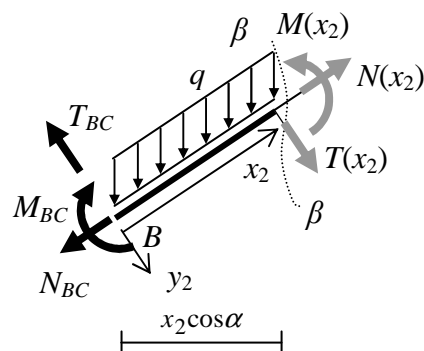
$$= \left(-\frac{7\sqrt{13}}{12} ql\right) \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} + 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = -\frac{7}{4} ql \Rightarrow T_{CB} = -\frac{7}{4} ql$$

Należy jeszcze wyznaczyć momenty M_{BC} i M_{CB} z równań dla węzłów B i C .

$$\sum_i M_i^B = 0 \Leftrightarrow M_{BC} - M_{BA} = 0 \Rightarrow M_{BC} = M_{BA} = \frac{5\sqrt{13}}{6} ql^2 \Rightarrow M_{BC} = \frac{5\sqrt{13}}{6} ql^2$$

$$\sum_i M_i^C = 0 \Leftrightarrow M_{CD} - M_{CB} = 0 \Rightarrow M_{CB} = M_{CD} = \frac{7\sqrt{13}}{12} ql^2 \Rightarrow M_{CB} = \frac{7\sqrt{13}}{12} ql^2$$

Zapisujemy równanie równowagi dla poniższego fragmentu pręta.



$$\sum_i M_{i\beta-\beta}^{B\beta} = 0 \Leftrightarrow M(x_2) - M_{BC} - T_{BC} \cdot x_2 + q \cdot x_2 \cdot \frac{1}{2} x_2 \cdot \cos \alpha = 0$$

Funkcja momentu gnącego ma postać

$$M(x_2) = M_{BC} + T_{BC} \cdot x_2 - q \cdot x_2 \cdot \frac{1}{2} x_2 \cdot \cos \alpha = \frac{5\sqrt{13}}{6} ql^2 + \frac{5}{4} ql \cdot x_2 - \frac{1}{2} q x_2^2 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(x_2) = \frac{5\sqrt{13}}{6} ql^2 + \frac{5}{4} ql \cdot x_2 - \frac{3\sqrt{13}}{26} q x_2^2$$

Wyznaczamy funkcję siły tnącej korzystając z zależności różniczkowej

$$\frac{dM(x_2)}{dx_2} = T(x_2) \Rightarrow T(x_2) = \frac{5}{4} ql - \frac{3\sqrt{13}}{13} q x_2$$

Przyrównując powyższą funkcję do zera wyznaczamy współrzędną przekroju zerowania się siły tnącej.

$$T(x_{2_0}) = \frac{5}{4} ql - \frac{3\sqrt{13}}{13} q x_{2_0} = 0 \Rightarrow x_{2_0} = \frac{5\sqrt{13}}{12} l$$

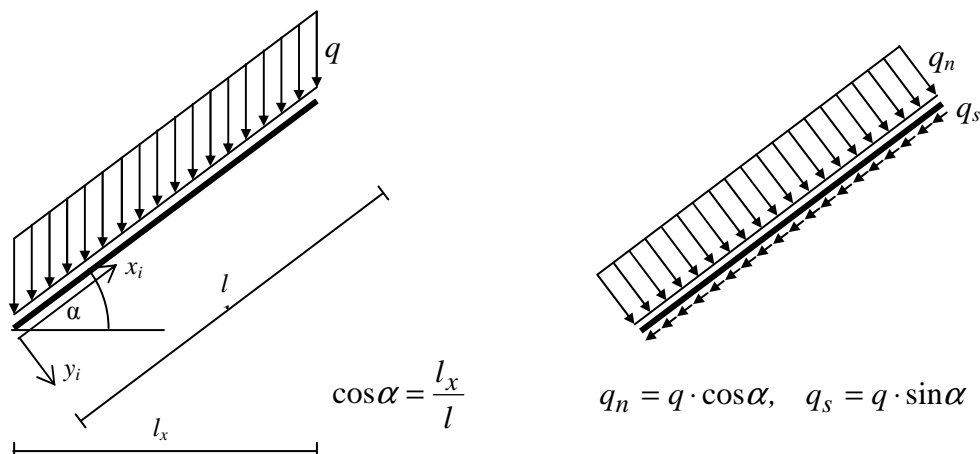
Obliczamy wartość momentu ekstremalnego podstawiając do funkcji momentu wyznaczoną powyżej współrzędną.

$$M_{\text{ekstr.}} = M\left(x_{2_0} = \frac{5\sqrt{13}}{12} l\right) = \frac{5\sqrt{13}}{6} ql^2 + \frac{5}{4} ql \cdot \frac{5\sqrt{13}}{12} l - \frac{3\sqrt{13}}{26} q \left(\frac{5\sqrt{13}}{12} l\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{5\sqrt{13}}{6} + \frac{25\sqrt{13}}{48} - \frac{3\sqrt{13}}{26} \cdot \frac{25 \cdot 13}{144}\right) ql^2 = \frac{35\sqrt{13}}{32} ql^2$$

W przedziale B-C wyznaczone są wartości trzech rzędnych wykresu momentu gnącego.

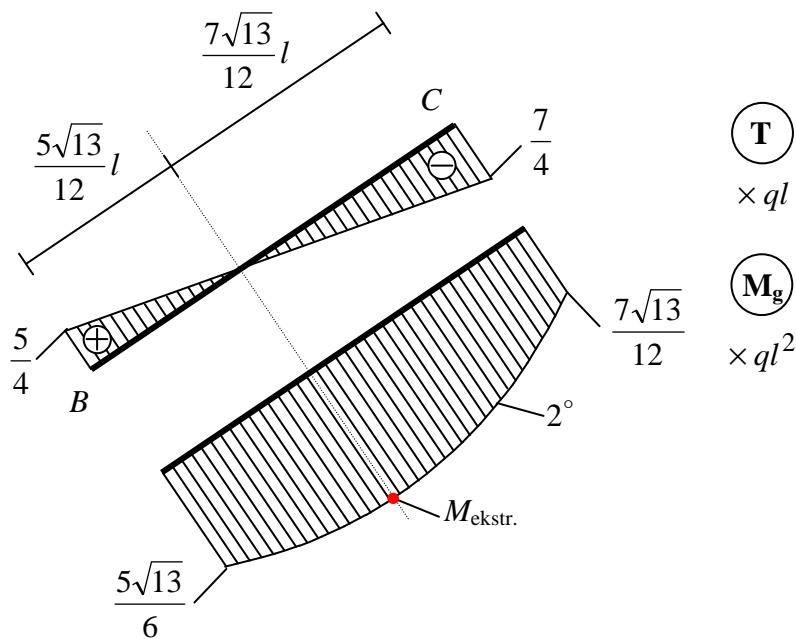
Polecenie do zadania nie obejmowało wyznaczenia funkcji sił przekrojowych. W takim przypadku możemy obliczenia przeprowadzić w inny sposób. Współrzędną przekroju zerowania się siły tnącej wyznaczymy dzieląc siłę T_{BC} przez q_n . We „Wprowadzeniu” poprzedzającym przykłady omówiony jest ten problem. W przypadku obciążenia zadanego na jednostkę długości pręta wartość natężenia obciążenia normalnego i stycznego możemy wyznaczyć z poniższych wzorów.



$$q_n = q \cdot \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} q, \quad q_s = q \cdot \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} q$$

$$x_{2_0} = \frac{T_{BC}}{q_n} = \frac{\frac{5}{4} ql}{\frac{3}{\sqrt{13}} q} = \frac{5\sqrt{13}}{12} l$$

Otrzymujemy identyczny wynik. Drugi sposób wymagał znacznie mniejszego nakładu pracy rachunkowej. Również wartość momentu ekstremalnego można wyznaczyć w prostszy sposób, wymagający wcześniejszego wykonania wykresu siły tnącej w przedziale B-C.



$$\frac{dM}{dx} = T(x) \Rightarrow M(x_k) = M(x_0) + \int_{x_0}^{x_k} T(x) dx$$

$$M_{\text{ekstr.}} = M\left(x_2 = \frac{5\sqrt{13}}{12} l\right) = M_{BC} + \int_0^{\frac{5\sqrt{13}}{12} l} T(x) dx = \frac{5\sqrt{13}}{6} ql^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} ql \cdot \frac{5\sqrt{13}}{12} l = \frac{35\sqrt{13}}{32} ql^2$$

Sprawdźmy jeszcze czy wartość momentu na końcu przedziału B-C wyznaczona powyższym sposobem będzie identyczna z wartością otrzymaną z równania momentów dla węzła C.

$$M(\sqrt{13}l) = M\left(\frac{5\sqrt{13}}{12} l\right) + \int_{\frac{5\sqrt{13}}{12} l}^{\sqrt{13}l} T(x) dx = \frac{35\sqrt{13}}{32} ql^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{7}{4} ql\right) \cdot \frac{7\sqrt{13}}{12} l = \frac{7\sqrt{13}}{12} ql^2$$

Oba sposoby prowadzą do identycznych wyników. Wyznaczone momenty mają dodatnie wartości. Oznacza to, że rozciągane są dolne/prawe włókna.

Wykresy sił przekrojowych

