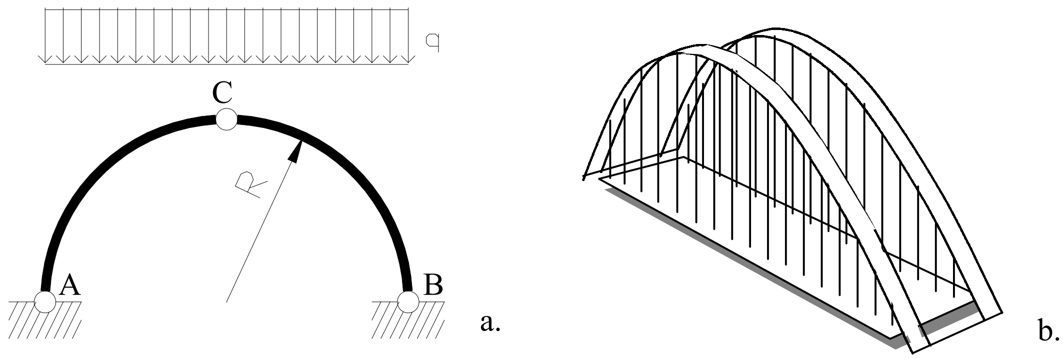
Przykład 10.1. Łuk trójprzegubowy.

Rysunek 10.1.1 przedstawia łuk trójprzegubowy, którego oś ma kształt półokręgu (jest to łuk „kołowy"). Łuk obciążony jest ciężarem konstrukcji podwieszonej. Narysować wykresy momentów gnących, sił normalnych i sił tnących w każdym punkcie osi łuku.



Rysunek 10.1.1. Łuk trójprzegubowy, kołowy, obciążony ciężarem konstrukcji podwieszonej (obciążenie narysowane nad łukiem a nie pod łukiem dla większej czytelności rysunku). a) schemat statyczny, b) interpretacja fizyczna - szkic.

Rozwiązanie.

Analiza obciążenia

Obciążenie przedstawione na rysunku to obciążenie równomiernie rozłożone „na jednostkę rzutu łuku". Szkic odręczny pokazuje jego możliwą interpretację inżynierską. W myśl tego szkicu, obciążenie rozłożone to w przybliżeniu średni, jednostkowy ciężar odcinka podwieszonej jezdni mostu pomiędzy dwoma cięgnami, przekazany na łuk przez każde cięgno. Obciążenie śniegiem jest również podawane zwykle „na jednostkę rzutu".
Wypadkową takiego obciążenia obliczamy identycznie jak w przykładach dotyczących ram płaskich, oznaczonych w niniejszym zbiorze zadań numerami rozpoczynającymi się od 3.*:
wypadkowa elementarna $dQ = q\,dx$
wartość wypadkowej części obciążenia rozłożonej na odcinku od x_P do x_B

$Q_{PB} = \int_{x_P}^{x_B} q\,dx = (x_B - x_P)q$ przyłożona jest w punkcie o współrzędnej $x_w = (x_B + x_P)/2$

Obliczenie reakcji

Obliczenie reakcji odbywa się również podobnie jak w jak w przykładach dotyczących ram płaskich, oznaczonych w niniejszym zbiorze zadań numerami rozpoczynającymi się od trójki (kierunki i zwroty wektorów sił założone są wstępnie jak na rysunku 10.1.2, w równaniach występują tylko ich długości)

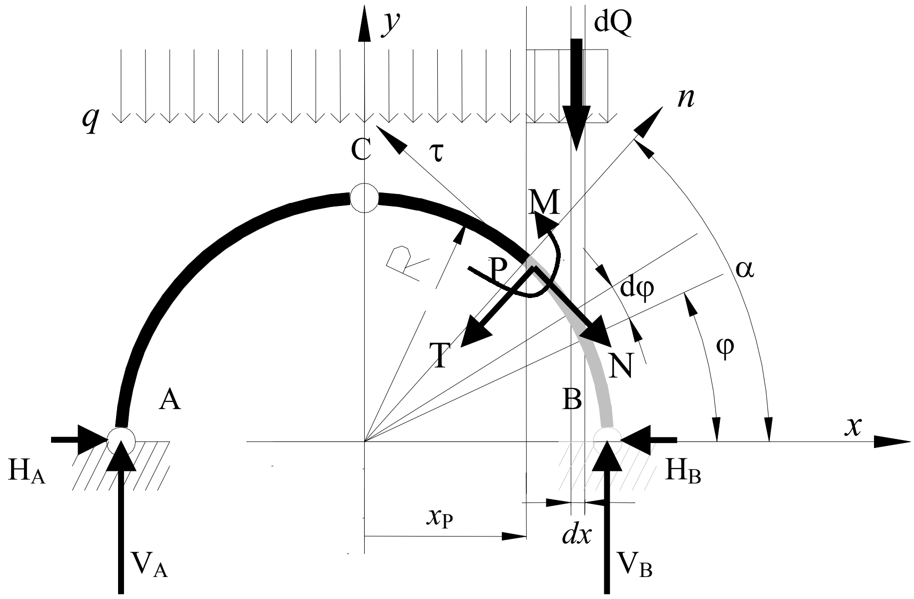
Suma momentów względem punktu B zapisuje się następująco: $V_A 2R - q \cdot 2R \cdot R = 0$,
stąd obliczamy wartość reakcji: $V_A = q \cdot 2R \cdot R / 2R = qR$

Suma rzutów na oś pionową prowadzi do równania: $V_B + V_A - 2R\,q = 0$, stąd wartość reakcji pionowej: $V_B = qR$

Suma momentów dla części CB względem punktu C (zwornik łuku) zapisuje się równaniem:

$H_B R - V_B R + q\,R \cdot R/2 = 0$ stąd, po podstawieniu wartości reakcji pionowej otrzymuje się: $H_B = qR/2$

Suma rzutów na oś poziomą daje reakcję pozioma w punkcie A: $H_A = H_B \Rightarrow H_A = qR/2$



Rysunek 10.1.2. Oznaczenia, układy współrzędnych *x*O*y*, rφ, *n*τ; wypadkowe. Wszystkie obciążenia działające na prawo od przekroju π poprowadzonego w punkcie P opisanym bieżącym kątem α i bieżącą współrzędną ξ_P redukowane są do punktu P.

Zapisanie równań sił wewnętrznych

Wprowadźmy oś normalną i styczną w dowolnym przekroju π wyznaczonym punktem P na osi pręta. Osie te (na Rysunku 10.1.2 oznaczono je symbolami *n* i τ) zmieniają swój kierunek wraz z położeniem punktu P, przesuwanym myślowo wzdłuż osi łuku. Kąt α opisujący nachylenie osi *n* do poziomu odmierzany jest w układzie biegunowym *r*φ z biegunem w środku łuku i z osią *r* współliniową z *n*.

Siłę normalną i tnąca będziemy obliczali jako rzuty na oś styczną τ (tnąca - odpowiednio na oś normalną *n*) wypadkowej wszystkich sił po prawej stronie przekroju π, zredukowanej do punktu P (P jest biegunem redukcji).

Moment gnący wyznaczymy jako moment wszystkich sił po prawej stronie przekroju P, otrzymany przy ich redukcji do punktu P (moment jest obliczony względem tego punktu).

Zapis równań dla sił normalnych i tnących

Wektor wypadkowy wszystkich sił na prawo od P zapisuje się następująco (znaki składowych wektora W zgodne z osiami OX i OY):

$$\vec{W}=\begin{Bmatrix} W_x \\ W_y \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -H_B \\ V_B-\int_{x_P}^{x_B} q dx \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -H_B \\ V_B-q(R-x_P) \end{Bmatrix}, \tag{1}$$

Rzut wypadkowej ***W*** na oś τ:
(Znak „+” dla siły rozciągającej czyli wtedy, gdy rzut jest skierowany „od” przekroju, znak „-” gdy rzut jest skierowany „do” przekroju czyli dla siły ściskającej!)

$$N=W_x \sin\alpha - W_y \cos\alpha \tag{2}$$

Rzut wypadkowej ***W*** na oś *n*:
(Uwaga! Znak + gdy rzut jest skierowany z lewej strony przekroju od dołu do góry lub z prawej od góry do dołu. Znak – przeciwnie !):

$$T=-W_x \cos\alpha - W_y \sin\alpha \tag{3}$$

Podstawiając (1) do (2) i (3) zastępując x_B przez jego wartość zależną od kąta α:
$x_P = R\cos\alpha$
otrzymamy po prostych przekształceniach:

$$N=-\frac{1}{2}qR\left(2\cos^2\alpha+\sin\alpha\right) \tag{4}$$

$$T=-\frac{1}{2}qR\cos\alpha\left(2\sin\alpha-1\right) \tag{5}$$

Zapis równania dla momentu gnącego

Moment wszystkich sił na prawo od P obliczony względem P zapisuje się następująco (znaki dodatnie gdy rozciągane są dolne włókna łuku):

$$M=V_B\left(R-x_P\right)-H_B y_P-q\left(R-x_P\right)\frac{1}{2}\left(R-x_P\right) \tag{6}$$

po podstawieniu wartości reakcji i uzależnieniu wszystkiego od kąta α otrzymuje się:
$y_P = R\sin\alpha$

$$M=\frac{qR^2}{2}\left(1-\sin\alpha-\left(\cos\alpha\right)^2\right) \tag{7}$$

Sprawdzamy teraz, czy zapisane równania prawdziwe są dla całego łuku. Przesuwając myślowo przekrój π wzdłuż osi łuku stwierdzamy, że nic nie zmienia się w wyrażeniach na reakcje i obciążenie.
Pozostaje więc sprawdzić, czy znane z wykładu równania równowagi elementu łuku są spełnione. Suma rzutów na oś łuku dla infinitezymalnego wycinka *dl* obciążonego obciążeniem „na rzut łuku”:

$$\frac{\partial N(\alpha)}{\partial\alpha}+T(\alpha)-qR\sin\alpha\cos\alpha=0 \tag{8}$$

$$-\frac{1}{2}qR\left(-2\cos\alpha\sin\alpha+\cos\alpha\right)-\frac{1}{2}qR\cos\alpha\left(2\sin\alpha-1\right)-qR\sin\alpha\cos\alpha=0\Rightarrow 0=0 \tag{9}$$

Suma rzutów na oś prostopadłą do łuku dla infinitezymalnego wycinka *dl*:

$$\frac{\partial T(\alpha)}{\partial \alpha} - N(\alpha) - qR\sin^2\alpha = 0 \tag{10}$$

$$-\frac{1}{2}qR(2\cos 2\alpha + \sin\alpha) + \frac{1}{2}qR\left(2\cos^2\alpha + \sin\alpha\right) - qR\sin^2\alpha = 0 \Rightarrow 0 = 0 \tag{11}$$

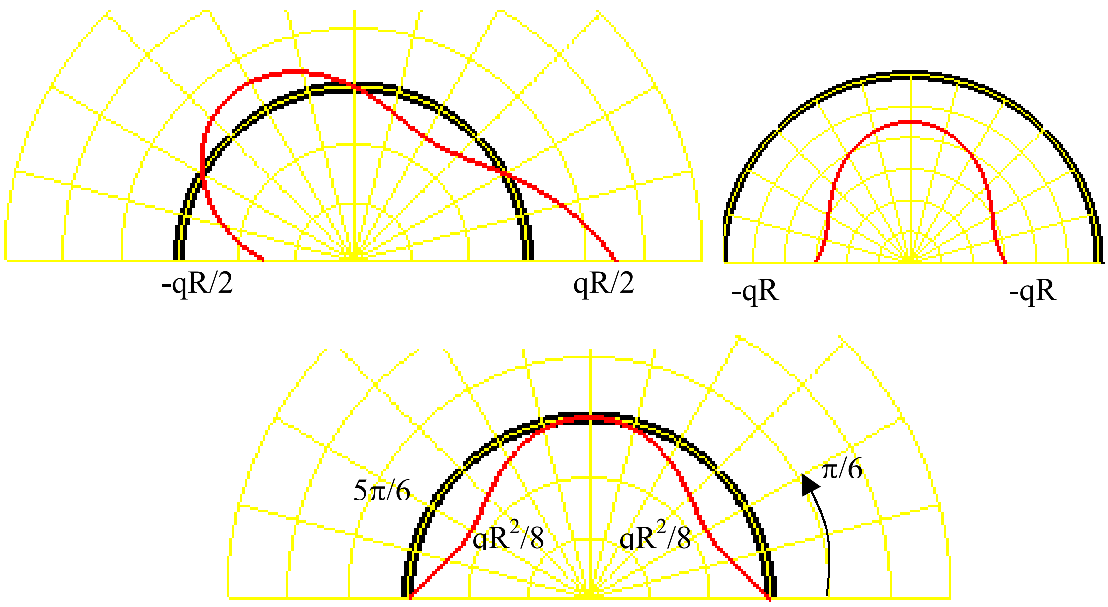
Suma momentów dla infinitezymalnego wycinka łuku *dl*:

$$\frac{\partial M(\alpha)}{\partial \alpha} + RT(\alpha) = 0 \tag{12}$$

$$\frac{qR^2}{2}(-\cos\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha) + R\left(-\frac{1}{2}qR\cos\alpha(2\sin\alpha - 1)\right) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \tag{13}$$

Wykresy sił wewnętrznych

Wykresy można przedstawić w układzie biegunowym „narysowane na osi łuku” lub tak, że oś pozioma jest osią kąta lub jeszcze inaczej, w funkcji x (rzut punktu łuku na poziom). W tym zadaniu wybierzemy pierwszy i drugi sposób przedstawienia sił wewnętrznych.
Wykresy, z naniesionymi wartościami w punktach charakterystycznych, „narysowane na osi łuku” wyglądają następująco:



Rysunek 10.1.3. Wykres sił tnących (a), normalnych (b) i momentów zginających (c). Wartości dodatnie sił wewnętrznych na zewnątrz osi łuku. Wykres momentów jest wykreślony po stronie włókien rozciąganych. Linia szeroka czarna to os łuku, linia pogrubiona czerwona (szara na rysunku czarno-białym) to wykres. Linie żółte (blade) to linie stałych wartości współrzędnych biegunowych)

Fragment kodu programu MAPLE pozwalającego na narysowanie wykresu tnących w powyższej formie podano poniżej (pozostałe wykresy narysowano w ten sam sposób):

```
> with(plots);
> T:=simplify(-Vb*sin(alpha)+Hb*cos(alpha)+q*R*(1-cos(alpha))*sin(alpha));
```

$$T := -\frac{1}{2}\, q\, R \cos(\alpha)\, (-1 + 2 \sin(\alpha))$$

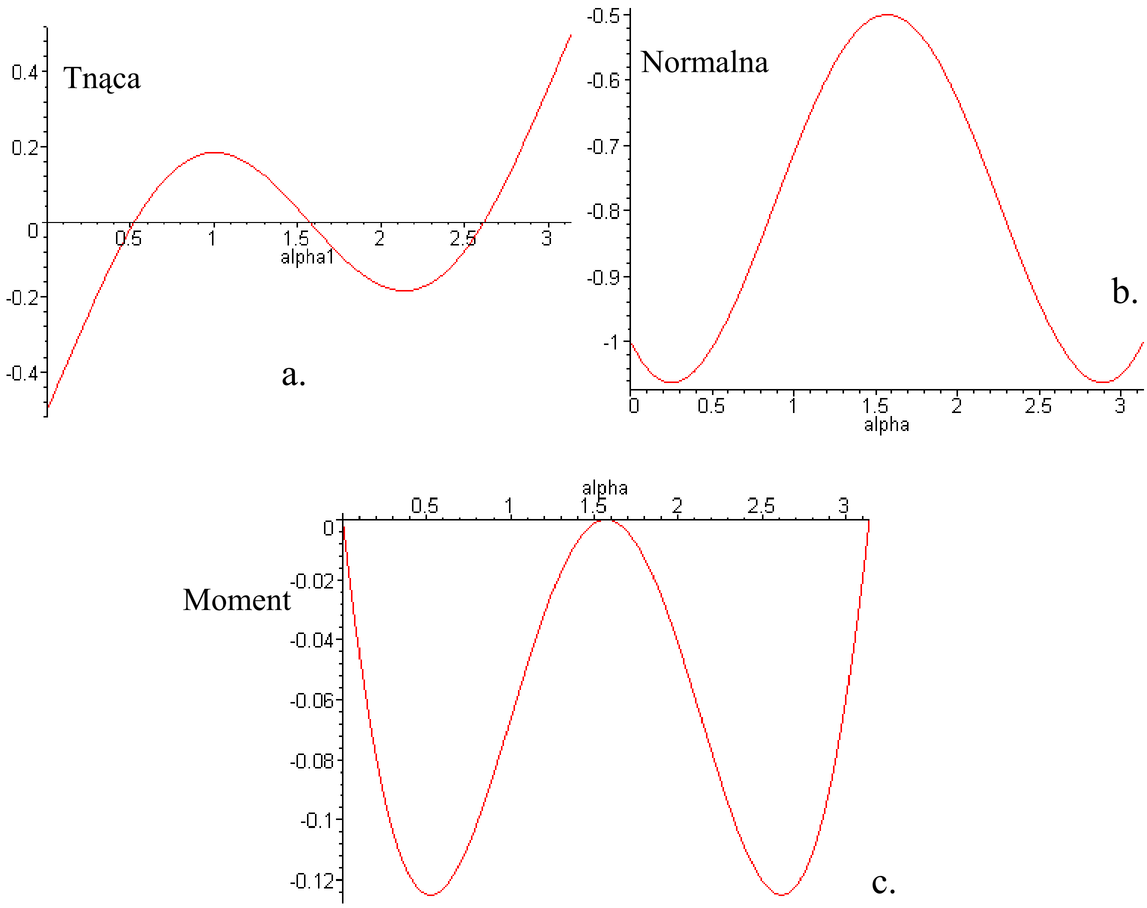
```
> WykresT(alpha):=subs(q=1,R=1,T);
```

$$\mathrm{WykresT}(\alpha) := -\frac{1}{2} \cos(\alpha)\, (-1 + 2 \sin(\alpha))$$

```
> a := plot(1+WykresT(alpha),alpha=0..Pi,coords=polar,thickness=2):
b := coordplot(polar,[0..2,0..Pi],view=[-2..2,0..2], colour=yellow):
c := plot(1,alpha=0..Pi,coords=polar,thickness=5,colour=black):
display([a,b,c]);
```

Jak widać, przyjęto tu q=1, R=1. W rezultacie otrzymuje się rysunek 10.1.3.a.

Te same wykresy, dla kąta odłożonego wzdłuż osi poziomej wyglądają następująco (Uwaga! W pierwszym wykresie α zastąpiono kątem $\alpha 1 = -\alpha + \pi$ mierzonym od punktu A do B, zgodnie z ruchem wskazówek zegara, tak, aby wartość na wykresie odpowiadała punktom na łuku rzutowanym na oś (taki zabieg nie jest konieczny a dla obu wykresów symetrycznych jest zbędny):



Rysunek 10.1.4. Wykres sił tnących (a), normalnych (b) i momentów zginających (c). Przyjęto q=1, R=1. Kąt liczony jest od lewej podpory tak, że wykres jest zrobiona „na rzucie" luku na oś poziomą.

Również dla powyższych wykresów przyjęto q=1, R=1.