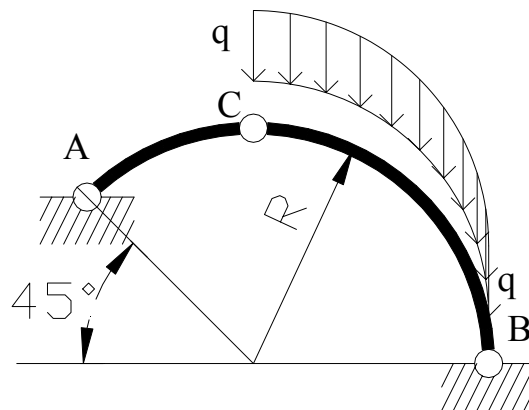


Przykład 10.2. Łuk obciążony ciężarem przęsła.

Rysunek przedstawia łuk trójprzegubowy, którego oś ma kształt części półokręgu. Łuk obciążony jest ciężarem własnym. Zakładamy, że prawe przęsło łuku jest nieporównanie cięższe niż lewe. (na przykład łuk jest szalunkiem, prawe przęsło zostało zalane betonem podczas gdy lewe jeszcze nie) Wobec tego przyjęto ciężar lewego przęsła jako równy zero. Narysować wykresy momentów gnących, sił normalnych i sił tnących w każdym punkcie osi łuku.



Rysunek 10.2.1. Łuk trójprzegubowy, kołowy, obciążony ciężarem własnym na prawym odcinku łuku..

Zadanie 10.2a.

Jako ćwiczenie rozwiązać zadanie, w którym ciężar własny q zadany jest na obu przęsłach łukowych, lewym i prawym, dla łuku o schemacie jak w zadaniu 10.1. Porównać wyniki z tymi, jakie otrzymano dla zadania 10.1. Przemyśleć podobieństwa i różnice.

Rozwiązanie.

Analiza obciążenia

Obciążenie przedstawione na rysunku to obciążenie rozłożone równomiernie „na jednostkę długości łuku”. Dla takiego obciążenia – jego fragmenty możemy zastąpić wypadkową obliczaną inaczej niż w przykładzie 10.1. i inaczej niż w przypadku ram o prętach prostych.

Wypadkowa elementarna ma jedynie składową pionową:

$$dQ = q dl = qR d\varphi \quad (1)$$

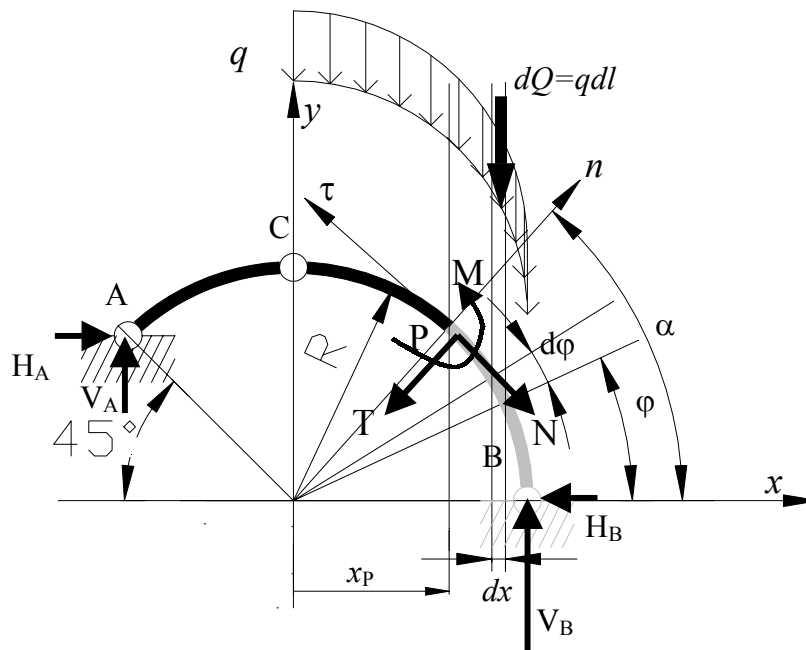
Wartość wypadkowej wzdłuż odcinka od x_P do x_B ograniczonego kątami α_P i α_B

$$Q_{AB} = \int_{\alpha_B}^{\alpha_P} dQ = \int_{\alpha_B}^{\alpha_P} q dl = \int_{\alpha_B}^{\alpha_P} qR d\alpha = qR(\alpha_P - \alpha_B) \quad (2)$$

Wypadkowa przyłożona jest w punkcie o współrzędnej:

$$x_w = \frac{\int_{\alpha_B}^{\alpha_P} xqdl}{\int_{\alpha_B}^{\alpha_P} qdl} = \frac{\int_{\alpha_B}^{\alpha_P} R \cos \alpha qRd\alpha}{\int_{\alpha_B}^{\alpha_P} qRd\alpha} = \frac{(\sin \alpha_P - \sin \alpha_B)}{\alpha_P - \alpha_B} R \quad (3)$$

Dla ćwiartki okręgu daje to wartość $x_{0,\pi/2} = \frac{2R}{\pi}$, mierzoną od środka okręgu. Można użyć tej informacji przy rozwiązywaniu zadania (proponuje się potraktować to jako ćwiczenie samodzielne), jednak w przykładowym rozwiązaniu nie będzie ona wykorzystana.



Rysunek 10.2.2. Oznaczenia, układy współrzędnych xOy , $r\varphi$, $n\tau$; wypadkowe. Wszystkie obciążenia działające na prawo od przekroju π poprowadzonego w punkcie P opisanym bieżącym kątem α i bieżącą współrzędną x_p redukowane są do punktu P.

Obliczenie reakcji

Obliczenie reakcji odbywa się według zasad opisanych w przykładzie 3: (kierunki i zwroty wektorów sił założone są wstępnie jak na Rysunku 10.2.2, w równaniach występują tylko ich długości)

Suma momentów względem punktu A:

$$V_B \left(R + R \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - H_B R \frac{\sqrt{2}}{2} - \int_0^{\pi/2} \left(R \frac{\sqrt{2}}{2} + R \cos \varphi \right) qR d\varphi = 0 \quad (4)$$

Otrzymuje się równanie:

$$V_B \left(R + R \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - H_B R \frac{\sqrt{2}}{2} - qR^2 \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4} + 1 \right) = 0 \quad (5)$$

Suma momentów dla części CB względem punktu C (zwornik łuku):

$$V_B R - H_B R - \int_0^{\pi/2} (R \cos \varphi) q R d\varphi = 0 \quad (6)$$

Otrzymuje się równanie (proponuje się sprawdzić poniższy wynik samodzielnie, posługując się znajomością położenia środka ciężkości wypadkowej ciężaru własnego!):

$$V_B - H_B - qR = 0 \quad (7)$$

Rozwiązanie układu równań (1), (2) z dwiema niewiadomymi V_B i H_B daje wartości reakcji:

$$V_B = qR \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = 1.4036 qR \quad H_B = qR \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = 0.4036 qR \quad (8)$$

Z sumy rzutów na oś poziomą i pionową dla całości układu można obliczyć V_A i H_A . Otrzymuje się następujące wartości:

$$V_A = qR \left(-1 + \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \pi \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = 0.1672 qR \quad (9)$$

$$H_A = H_B = 0.4036 qR \quad (10)$$

Zapisanie równań sił wewnętrznych

Wprowadźmy oś normalną i styczną w dowolnym przekroju π wyznaczonym punktem P na osi pręta. Osie te (na Rysunku 10.2.2 oznaczono je symbolami n i τ) zmieniają swój kierunek wraz z położeniem punktu P, przesuwającym myślowo wzdłuż osi łuku. Kąt α opisujący nachylenie osi n do poziomu odmierzany jest w układzie biegunowym $r\varphi$ z biegunem w środku łuku i z osią r współliniową z n .

Siłę normalną (tnącą) będziemy obliczali jako rzut na oś styczną τ (tnąca odpowiednio na oś normalną n) wektora głównego wszystkich sił po prawej stronie przekroju π , zredukowanego do punktu P (P jest biegunem redukcji).

Moment gnący wyznaczmy jako moment wszystkich sił po prawej stronie przekroju P, otrzymany przy ich redukcji do punktu P (moment obliczany jest względem tego punktu).

Zapis równań dla sił normalnych i tnących

Wektor wypadkowy wszystkich sił na prawo od P zapisuje się następująco (znaki składowych wektora \vec{W} zgodne z osiami OX i OY):

$$\vec{W} = \begin{Bmatrix} W_x \\ W_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -H_B \\ V_B - \int_{\alpha_B}^{\alpha_P} qR d\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -H_B \\ V_B - qR\alpha \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Rzut wypadkowej \vec{W} na oś τ :

(Znak „+” dla siły rozciągającej czyli wtedy, gdy rzut jest skierowany „od” przekroju, znak „-” gdy rzut jest skierowany „do” przekroju czyli dla siły ściskającej!)

$$N = (-H_B) \sin \alpha - (V_B - qR\alpha) \cos \alpha \quad (12)$$

Rzut wypadkowej \vec{W} na oś n :

(Uwaga! Znak + gdy rzut jest skierowany z lewej strony przekroju od dołu do góry lub z prawej od góry do dołu. Znak – przeciwnie !):

$$T = H_B \cos \alpha - (V_B - qR\alpha) \sin \alpha \quad (13)$$

Podstawiając (1) do (2) i (3) otrzymamy po prostych przekształceniach (użyto wartości liczbowych aby zależność od jedynej zmiennej niezależnej czyli kąta α była czytelniejsza:

$$N = -0.4036 \sin \alpha - 1.4036 \cos \alpha + qR\alpha \cos \alpha \quad (14)$$

$$T = 0.4036 \cos \alpha - 1.4036 \sin \alpha + qR\alpha \sin \alpha \quad (15)$$

Zapis równania dla momentu gnącego

Moment wszystkich sił na prawo od P obliczony względem P zapisuje się następująco (znaki dodatnie gdy rozciągane są dolne włókna łuku):

$$M = V_B(R - x_P) - H_B y_P - \int_0^\alpha (R \cos \varphi - R \cos \alpha) qR d\varphi \quad (16)$$

We wzorze na moment mogliśmy, zamiast całki w której wyraz w nawiasie jest ramieniem działania wypadkowej $qRd\varphi$, użyć wzoru (3) na środek ciężkości wypadkowej z odcinka BP (proponuje się sprawdzić wynik całkowania tym sposobem).

Po podstawieniu wartości reakcji i uzależnieniu wszystkiego od kąta α :

$$x_P = R \cos \alpha \quad y_P = R \sin \alpha \quad (17)$$

otrzymuje się wyrażenie na moment gnący, w którym wstawiono wartości liczbowe reakcji aby równania stały się czytelniejsze:

$$M = 1.4036qR^2(1 - \cos \alpha) - 0.4036qR^2 \sin \alpha - qR^2(\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) \quad (18)$$

Sprawdzamy teraz, czy zapisane równania prawdziwe są dla całego łuku. Przesuwając myślowo przekrój P wzdłuż osi łuku stwierdzamy, że w zworniku łuku znika obciążenie ciężarem własnym. Wzory powyższe obowiązują więc jedynie dla kąta $\alpha < \pi/2$.

Dla części łuku na lewo od punktu C równania sił wewnętrznych zostaną napisane w dalszej części rozwiązania.

Sprawdzenie równowagi wycinka łuku na prawo od zwornika

Pozostaje sprawdzić, czy równanie równowagi elementu łuku są spełnione:

Suma rzutów na oś łuku dla infinytezyrnalnego wycinka dl obciążonego ciężarem własnym:

$$\frac{\partial N(\alpha)}{\partial \alpha} + T(\alpha) - qR \cos \alpha = 0 \quad (19)$$

Podstawiając do powyższej równości wzory na T, i pochodną N otrzymamy: $0=0$.

Pozostawiamy to do samodzielnego sprawdzenia, proponujemy też wyprowadzić samodzielnie wzory (19),(20) i (21), które powinny być znane z wykładu.

Suma rzutów na oś prostopadłą do łuku dla infinytezyrnalnego wycinka dl obciążonego ciężarem własnym:

$$\frac{\partial T(\alpha)}{\partial \alpha} - N(\alpha) - qR \sin \alpha = 0 \quad (20)$$

jak wyżej, otrzymuje się: $0=0$

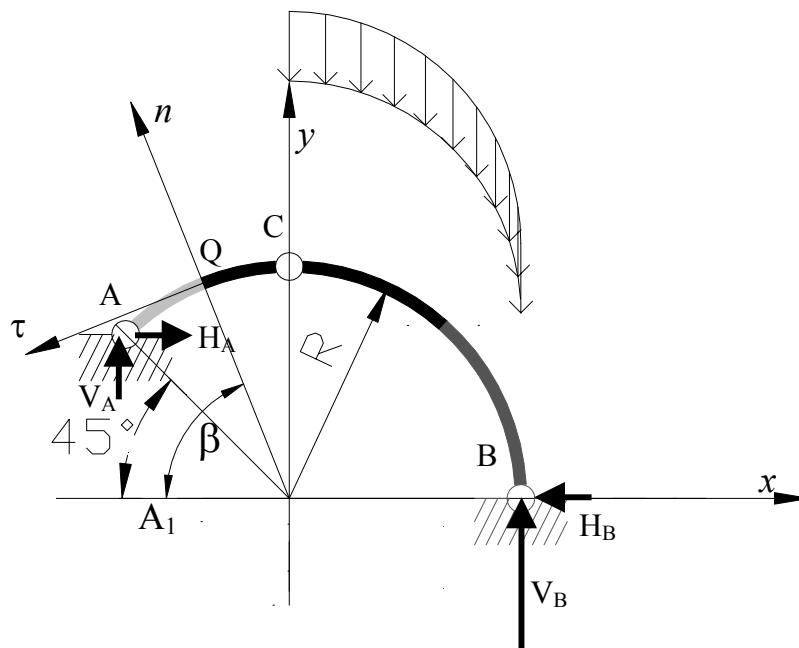
Podobnie suma momentów dla infinitezimalnego wycinka łuku $d\ell$:

$$\frac{\partial M(\alpha)}{\partial \alpha} + RT(\alpha) = 0 \quad (21)$$

daje po podstawieniu wzoru na pochodną M i T wyrażenie prawdziwe $0=0$

Zapis równań dla sił normalnych, tnących i momentów dla lewej części łuku

Przyjmijmy, że pewien inny kąt, β , zmienia się od punktu A_1 do bieżącego punktu Q na lewej części łuku. Siłę normalną (tnącą) będziemy obliczali jako rzut na oś styczną τ (tnąca odpowiednio na oś normalną n) wektora głównego (wypadkowej) wszystkich sił po lewej stronie przekroju θ , zredukowanego do punktu Q (Q jest teraz biegunem redukcji).



Rysunek 10.2.3. Oznaczenia, układy współrzędnych xOy , $r\beta$, $n\tau$; wypadkowe. Wszystkie obciążenia działające na lewo od przekroju θ poprowadzonego w punkcie Q opisanym bieżącym kątem β redukowane są do punktu Q .

Ponieważ wypadkowa po lewej to tylko reakcje V_A i H_A , więc wzory zapisują się łatwo jako rzuty reakcji na oś n i na oś τ :

(Znak „+” dla siły rozciągającej czyli wtedy, gdy rzut jest skierowany „od” przekroju, znak „-” gdy rzut jest skierowany „do” przekroju czyli dla siły ściskającej! znak „+” gdy rzut jest skierowany z lewej strony przekroju od dołu do góry lub z prawej od góry do dołu. Znak – przeciwnie !):

$$\begin{aligned} N &= -H_A \sin \beta - V_A \cos \beta = qR(-0.4036 \sin \beta - 0.1672 \cos \beta) \\ T &= -H_A \cos \beta + V_A \sin \beta = qR(-0.4036 \cos \beta + 0.1672 \sin \beta) \end{aligned} \quad (22)$$

Moment gnący wyznaczmy jako moment wszystkich sił po lewej stronie punktu Q , otrzymany przy ich redukcji do punktu Q (moment jest obliczony jest względem tego punktu).

$$\begin{aligned}
M &= -H_A \left(R \sin \beta - R \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + V_A \left(R \cos \beta - R \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\
&= -0.4036qR \left(R \sin \beta - R \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 0.1672qR \left(R \cos \beta - R \frac{\sqrt{2}}{2} \right)
\end{aligned} \tag{23}$$

Sprawdzenie równowagi wycinka łuku na lewo od zwornika

Sprawdzenie to wykonuje się tak jak poprzednio dla prawej części, w odpowiednich wzorach obciążenie q jest równe 0.

$$\frac{\partial N(\alpha)}{\partial \alpha} + T(\alpha) = 0 \quad \frac{\partial T(\alpha)}{\partial \alpha} - N(\alpha) = 0 \quad \frac{\partial M(\alpha)}{\partial \alpha} + RT(\alpha) = 0 \tag{24}$$

Wykresy sił wewnętrznych

Wykresy można przedstawić w układzie biegunowym „narysowane na osi łuku” lub tak, że oś pozioma jest osią kąta lub jeszcze inaczej, w funkcji x (rzut punktu łuku na poziom). W tym zadaniu wybierzemy pierwszy i drugi sposób przedstawienia sił wewnętrznych.

Na wszystkich poniższych wykresach, bez komplikowania zapisu formalnego – przedstawiono na jednym rysunku wykresy otrzymane według wzorów (14), (15), (18) dla części łuku na prawo od punktu C i według wzorów (22), (23) – na lewo od punktu C. Zaleca się zestawiać wszystkie wykresy na tym samym rysunku. Można wtedy stwierdzić, czy wykres jest odpowiednio do obciążenia ciągły i odpowiednio do obciążenia gładki.

Fragment kodu programu MAPLE pozwalającego na narysowanie wykresu tnących w powyższej formie podano poniżej (pozostałe wykresy narysowano w ten sam sposób):

```

> with(plots) :
> Tp := -Vc*sin(alpha) + Hc*cos(alpha) + int(q*R, psi=0..alpha)*sin(alpha) ;
Tp := -\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}qR + \frac{1}{4}qR\sqrt{2}\pi + qR\right)\sin(\alpha) + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}qR + \frac{1}{4}qR\sqrt{2}\pi\right)\cos(\alpha)
      + qR\alpha\sin(\alpha)
> WykresTp(alpha) := subs(q=1, R=1, Tp) ;
WykresTp(alpha) := -\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\pi + 1\right)\sin(\alpha) + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\pi\right)\cos(\alpha) + \alpha\sin(\alpha)
> Tl := Va*sin(beta) - Ha*cos(beta) ;
Tl := \left(\frac{1}{2}qR\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2}qR - \frac{1}{4}qR\sqrt{2}\pi - qR\right)\sin(\beta) - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}qR + \frac{1}{4}qR\sqrt{2}\pi\right)\cos(\beta)
> WykresTl(beta) := subs(q=1, R=1, Tl) ;
WykresTl(beta) := \left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\pi - 1\right)\sin(\beta) - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\pi\right)\cos(\beta)
> readlib(piecewise) ;
> T := piecewise(alpha < Pi/2, Tp, alpha > Pi/2, subs(beta = -alpha + Pi, Tl)) ;
T := \begin{cases} -\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}qR + \frac{1}{4}qR\sqrt{2}\pi + qR\right)\sin(\alpha) + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}qR + \frac{1}{4}qR\sqrt{2}\pi\right)\cos(\alpha) + qR\alpha\sin(\alpha) & \alpha < \frac{1}{2}\pi \\ \left(\frac{1}{2}qR\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2}qR - \frac{1}{4}qR\sqrt{2}\pi - qR\right)\sin(-\alpha + \pi) - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}qR + \frac{1}{4}qR\sqrt{2}\pi\right)\cos(-\alpha + \pi) & \frac{1}{2}\pi < \alpha \end{cases}
> a := plot(1+subs(q=1, R=1, T), alpha=0..3*Pi/4, coords=polar, thickness=2) :

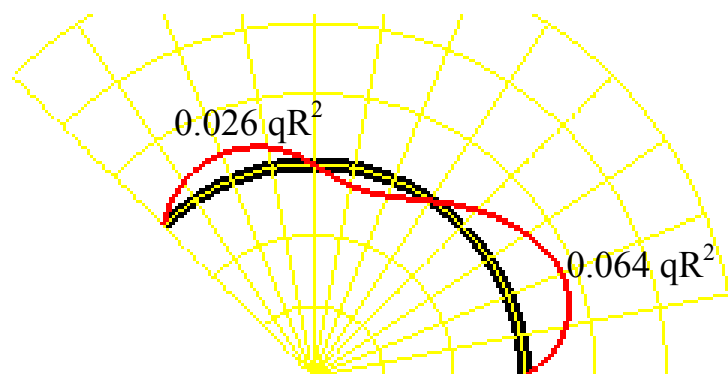
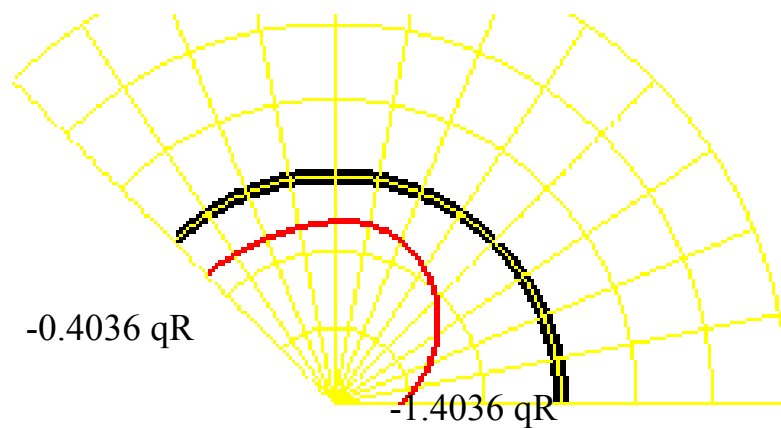
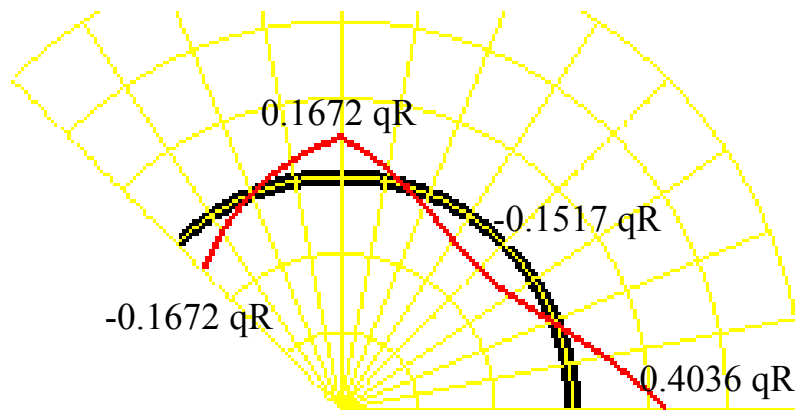
```

```

b := coordplot(polar,[0..2,0..3*Pi/4],view=[-2..2,0..2], colour=yellow):
c := plot(1,alpha=0..3*Pi/4,coords=polar,thickness=5,colour=black):
display([a,b,c]):

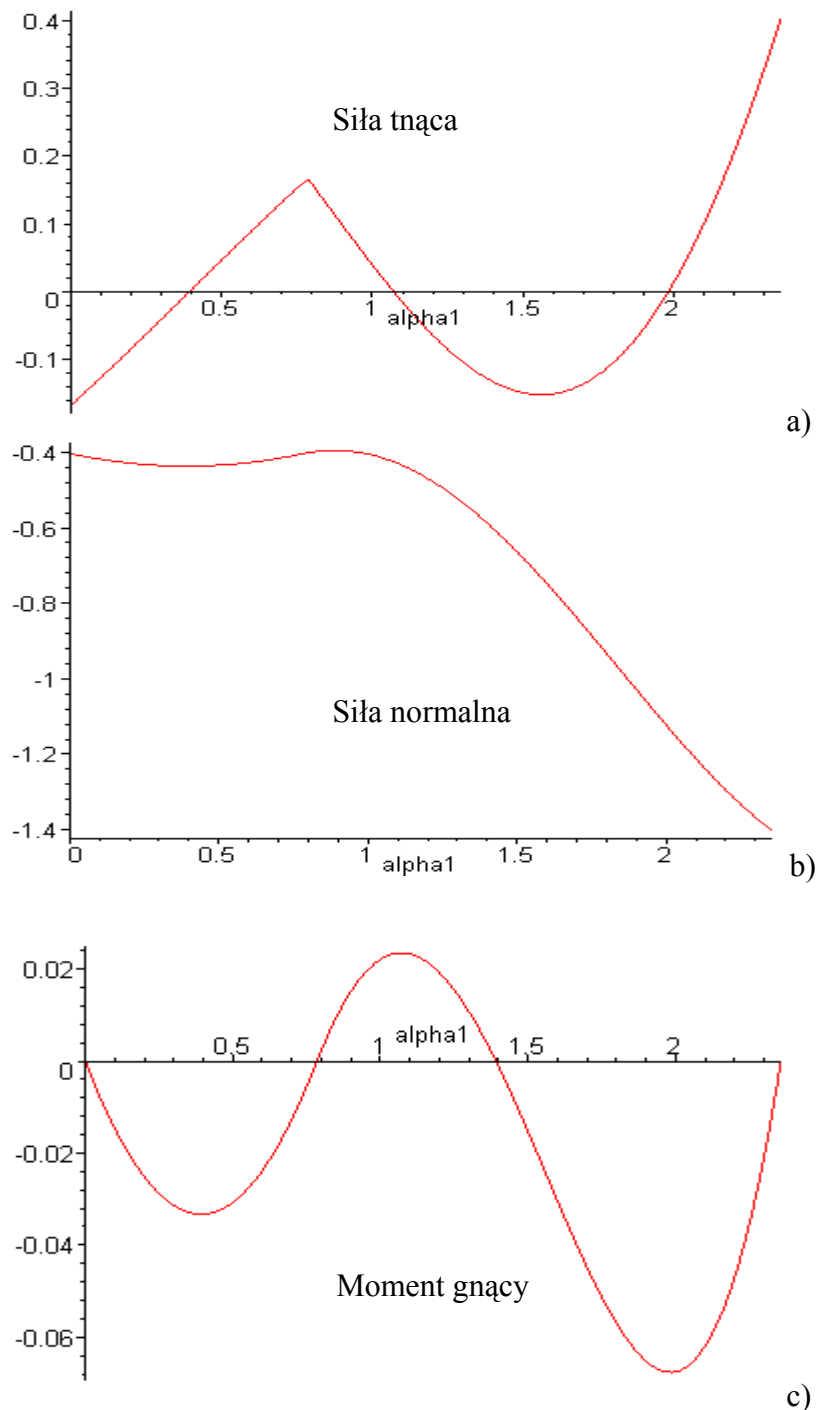
```

Jak widać, przyjęto tu $q=1$, $R=1$. W rezultacie otrzymuje się rysunek 10.2.4.a. Wszystkie wykresy, z naniesionymi wartościami w punktach charakterystycznych, „narysowane na osi łuku”, wyglądają następująco:



Rysunek 10.2.4. Wykres sił tnących (a), normalnych (b) i momentów zginających (c). Wartości dodatnie sił wewnętrznych na zewnątrz osi łuku. Wykres momentów jest wykreślony po stronie włókien rozciąganych. Linia szeroka czarna to os łuku, linia pogrubiona czerwona (szara na rysunku czarno-białym) to wykres. Linie żółte (blade) to linie stałych wartości współrzędnych biegunowych)

Te same wykresy, dla kąta odłożonego wzdłuż osi poziomej wyglądają następująco (Uwaga! We wszystkich wykresach α zastąpiono kątem $\alpha_1 = -\alpha + 3\pi/4$ mierzonym od punktu A do B, zgodnie z ruchem wskazówek zegara, tak, aby wartość na wykresie odpowiadała punktom na łuku rzutowanym na oś.



Rysunek 10.2.4. Wykres sił tnących (a), normalnych (b) i momentów zginających (c). Przyjęto $q=1$, $R=1$. Uwaga! Kąt α_1 liczony jest od lewej podpory tak, że wykres jest zrobiony „na rzucie” łuku na oś poziomą (wystarczy zastąpić we wszystkich wzorach wynikowych kąt α kątem $-\alpha + \pi$). Również dla powyższych wykresów przyjęto $q=1$, $R=1$.