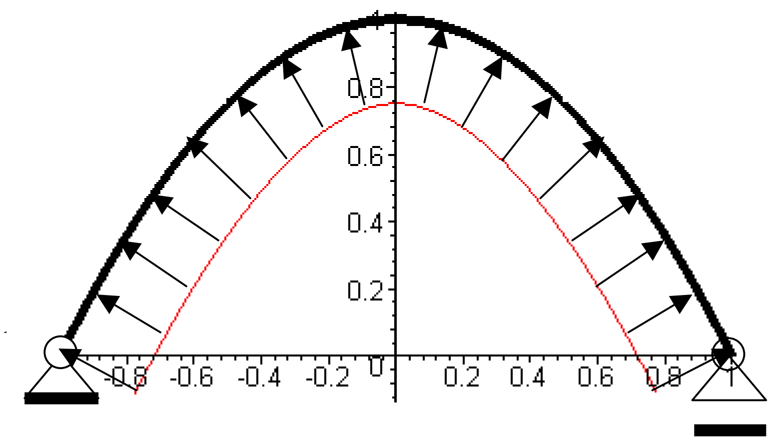
Przykład 10.3. Łuk paraboliczny.

Rysunek przedstawia łuk wolnopodparty, którego oś ma kształt paraboli drugiego stopnia (łuk „paraboliczny"). Łuk obciążony jest ciśnieniem wewnętrznym (wektor elementarnej wypadkowej jest prostopadły do łuku), o stałej gęstości q na jednostkę długości łuku. Narysować wykresy momentów gnących, sił normalnych i sił tnących w każdym punkcie osi łuku.



Rysunek 10.3.1. Łuk wolnopodparty, paraboliczny – wymiary, obciążenie, oznaczenia.

Zadanie 10.3.a
Postępując podobnie jak w rozwiązaniu zadania 10.3., napisać i narysować samodzielnie wykresy momentów gnących, sił normalnych i sił tnących w każdym punkcie osi łuku kołowego obciążonego ciśnieniem wewnętrznym, jak na rysunku powyżej. Przyjąć, że pół-łuk kołowy o promieniu L rozpięty jest pomiędzy punktami A i B. Skomentować wynik, uzasadnić tezę, że kształt kołowy jest bardziej racjonalny dla zadanego obciążenia niż kształt paraboliczny.

Zadanie 10.3.b
Postępując podobnie jak w rozwiązaniu zadania 10.3, napisać i narysować samodzielnie wykresy momentów gnących, sił normalnych i sił tnących w każdym punkcie osi łuku parabolicznego obciążonego obciążeniem pionowym „na jednostkę rzutu", takim jak w zadaniu 10.1. Skomentować wynik, uzasadnić tezę, że kształt paraboliczny jest bardziej racjonalny dla takiego obciążenia niż kształt kołowy.

Rozwiązanie.

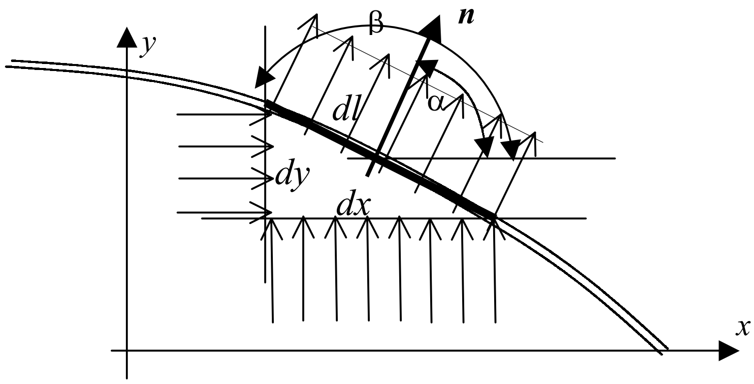
Analiza obciążenia

Obciążenie przedstawione na rysunku to obciążenie równomierne „na jednostkę długości łuku". Obie składowe wektora wypadkowej elementarnej są (w położeniu ogólnym) różne od zera. Aby je obliczyć, zauważmy że wypadkowa jest prostopadła do łuku a więc współliniowa z wektorem jednostkowym ***n*** (normalna zewnętrzna do łuku). Współrzędne wektora ***n*** to cosinusy kątów jaki ten wektor tworzy z osiami Ox i Oy (odpowiednio).

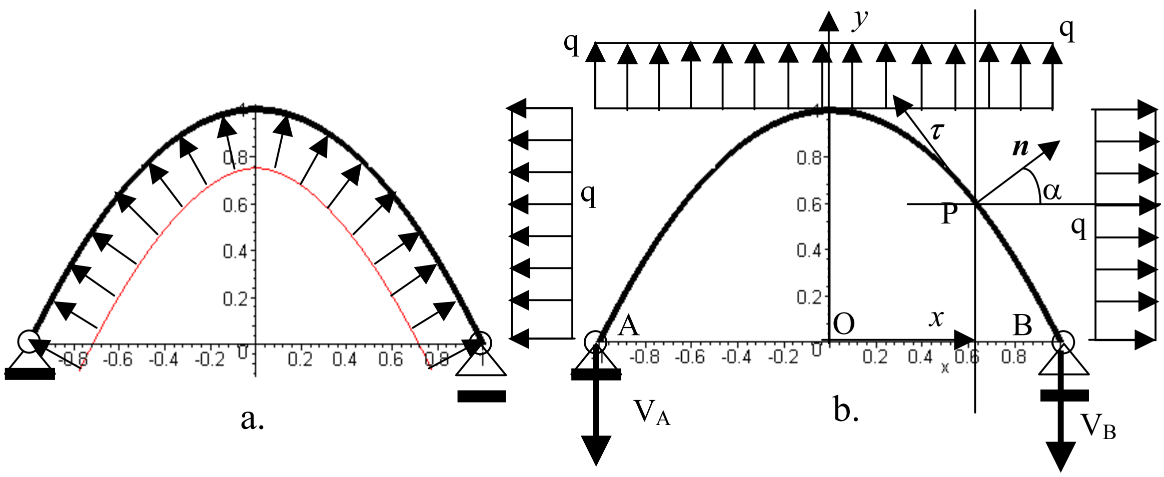
$$|dQ| = q\,dl \tag{1}$$

$$d\vec{Q} = qdl\,\vec{n} = qdl\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = qdl\begin{Bmatrix} \cos(\angle \vec{n}Ox) \\ \cos(\angle \vec{n}Oy) \end{Bmatrix} = qdl\begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} = q\begin{Bmatrix} dl\cos\alpha \\ dl\sin\alpha \end{Bmatrix} = q\begin{Bmatrix} dy \\ dx \end{Bmatrix} \tag{2}$$

Rozumowanie zapisane w równaniu (2) oznacza, że rozłożono obciążenie przypadające na jednostkę długości łuku na dwie składowe: poziomą qdy i pionową qdx o tej samej gęstości q ale przypadające na jednostkę rzutu elementu łuku na oś poziomą i pionową. W ten sposób sprowadzono obciążenie do elementarnego przypadku znanego z zadania 10.1. Ilustruje to rysunek 10.3.2. oraz 10.3.3.



Rysunek 10.3.2. Infinitezymalny wycinek łuku obciążonego radialnie. Ilustracja wzoru (2), objaśnienia w tekście.



Rysunek 10.3.3. Obciążenie radialne na jednostkę łuku parabolicznego na rysunku a) jest równoważne obciążeniu na jednostkę rzutu (rysunek b)). Na rysunku b) zaznaczono przyjęte zwroty reakcji oraz układy współrzędnych.

Wypadkowa części obciążenia rozłożonego na odcinku od x_P do x_B rozkłada się więc na dwie składowe - poziomą Q_x i pionową Q_y

$Q_{xPB} = \int_{y_B}^{y_P} q\,dy = (y_P - x_B)q$ przyłożona jest wzdłuż linii $y_w = (y_B + y_P)/2$

$$Q_{yPB} = \int_{x_P}^{x_B} q\, dx = (x_B - x_P) q$$ przyłożona jest wzdłuż linii $x_w = (x_B + x_P)/2$

Równanie osi łuku i kąta normalnej do osi łuku.

Łatwo ustalić z rysunku 10.3.1, że równanie przedstawionej paraboli kwadratowej ma postać:

$$h(x) = (L - x)(L + x)/L = L - \frac{x^2}{L} \tag{3}$$

Tangens kąta mierzonego od osi Ox do osi stycznej do paraboli jest równy pochodnej w x (oznaczenia kątów na rysunku 10.3.2):

$$\mathrm{tg}(\beta) = \frac{\partial}{\partial x} h(x) = -2\frac{x}{L} \tag{4}$$

Kąt potrzebny do dalszych rachunków to α a nie β. Stwierdzamy, że $\alpha = \beta - \pi/2$, obliczymy teraz cotangens, sinus i cosinus kąta α.

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{ctg}(\beta - \pi/2) = -\mathrm{tg}\,\beta = \frac{2x}{L} \tag{5}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ctg}^2\,\alpha + 1}} = \frac{L}{\sqrt{4x^2 + L^2}} \tag{6}$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sqrt{\mathrm{ctg}^2\,\alpha + 1}} = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + L^2}} \tag{7}$$

Obliczenie reakcji

Obliczenie reakcji, dzięki przedstawieniu obciążenia jak na Rysunku 10.3.3.b, odbywa się podobnie jak w zadaniu 10.1:
(kierunki i zwroty wektorów sił założone są wstępnie jak na rysunku, w równaniach występują tylko ich długości)

Suma momentów względem punktu B: $V_A 2L - q\,2L \cdot L = 0$ stad wartość reakcji: $V_A = q\,L$
Suma rzutów na oś pionową: $V_B + V_A - 2L\,q = 0$ po podstawieniu obliczonej reakcji w punkcie A otrzymuje się: $V_B = Lq$
Suma rzutów na oś poziomą: $H_A = 0$

Zapisanie równań sił wewnętrznych

Wprowadźmy oś normalną i styczną w dowolnym przekroju π wyznaczonym punktem P na osi łuku. Osie te (na Rysunku 10.2.2 oznaczono je symbolami n i τ) zmieniają swój kierunek wraz z położeniem punktu P, przesuwanym myślowo wzdłuż osi łuku. Potrzebne funkcje trygonometryczne kąta α opisujący nachylenie osi n do poziomu uzależnione zostały od współrzędnej x wzorami (5), (6) i (7).
Siłę normalną i tnącą będziemy obliczali jako rzuty na oś styczną τ (tnąca - odpowiednio na oś normalną n) wypadkowej wszystkich sił po prawej stronie przekroju π, zredukowanej do punktu P (P jest biegunem redukcji).

Moment gnący wyznaczymy jako moment wszystkich sił po prawej stronie przekroju P, otrzymany przy ich redukcji do punktu P (moment jest obliczony względem tego punktu).

Zapis równań dla sił normalnych i tnących

Wektor wypadkowy wszystkich sił na prawo od P zapisuje się następująco (znaki składowych wektora W zgodne z osiami OX i OY):

$$\vec{W} = \begin{Bmatrix} W_x \\ W_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q\left(L - \dfrac{x^2}{L}\right) \\ -qL + q(L-x) \end{Bmatrix} \tag{8}$$

Rzut wypadkowej ***W*** na oś τ:

$$N = W_x \sin\alpha - W_y \cos\alpha \tag{9}$$

(Znak „+" dla siły rozciągającej czyli wtedy, gdy rzut jest skierowany „od" przekroju, znak „-" gdy rzut jest skierowany „do" przekroju czyli dla siły ściskającej!)
Podstawiając (6) (7) i (8) do (9) otrzymamy po prostych przekształceniach:

$$N = \frac{2q(x^2 + L^2)}{\sqrt{4x^2 + L^2}} \tag{10}$$

Rzut wypadkowej ***W*** na oś *n*:

$$T = -W_x \cos\alpha - W_y \sin\alpha \tag{11}$$

(Uwaga! Znak + gdy rzut jest skierowany z lewej strony przekroju od dołu do góry lub z prawej od góry do dołu. Znak – przeciwnie !) Podstawiając (6) (7) i (8) do (11) otrzymamy po prostych przekształceniach:

$$T = \frac{qx(2x^2 - L^2)}{L\sqrt{4x^2 + L^2}} \tag{12}$$

Zapis równania dla momentu gnącego

Moment wszystkich sił na prawo od P obliczony względem P zapisuje się następująco (znaki dodatnie gdy rozciągane są dolne włókna łuku):

$$M = -qL(L-x) - q(L-x)\frac{1}{2}(L-x) + q(L - \frac{x^2}{L})\frac{1}{2}(L - \frac{x^2}{L}) \tag{13}$$

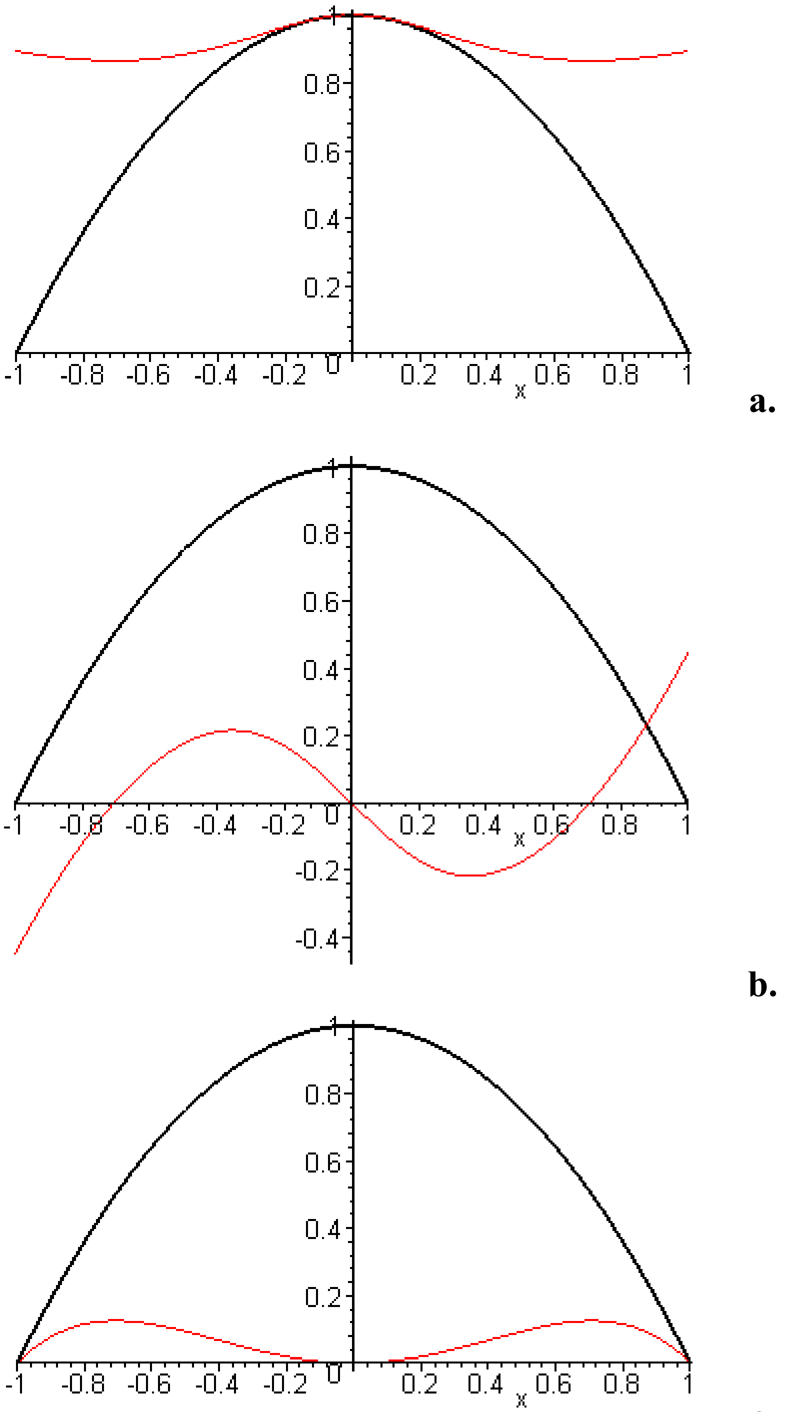
po prostych przekształceniach otrzymuje się:

$$M = -q\frac{x(x^2 - L^2)}{2L^2} \tag{14}$$

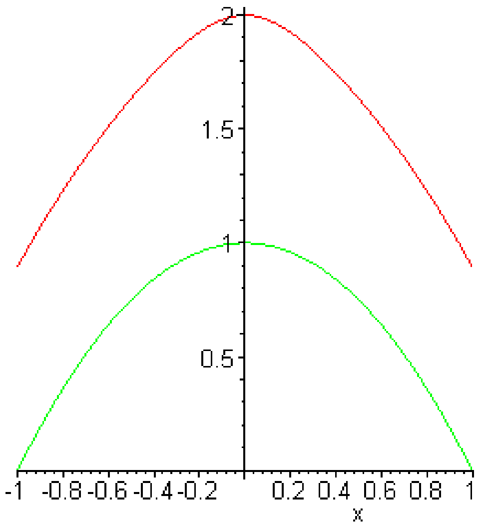
Sprawdzamy teraz, czy zapisane równania prawdziwe są dla całego łuku. Przesuwając myślowo przekrój π wzdłuż osi łuku stwierdzamy, że mimo iż przekraczając zwornik łuku zmienia się znak obciążenia poziomego, to nic nie zmienia się w wyrażeniach. Łatwo się o tym przekonać, przypominając sobie, że obciążenie to jest jedynie postacią równoważna obciążenia radialnego a opis tej jego postaci nie zmienia przy przejściu przez zwornik.

Wykresy sił wewnętrznych

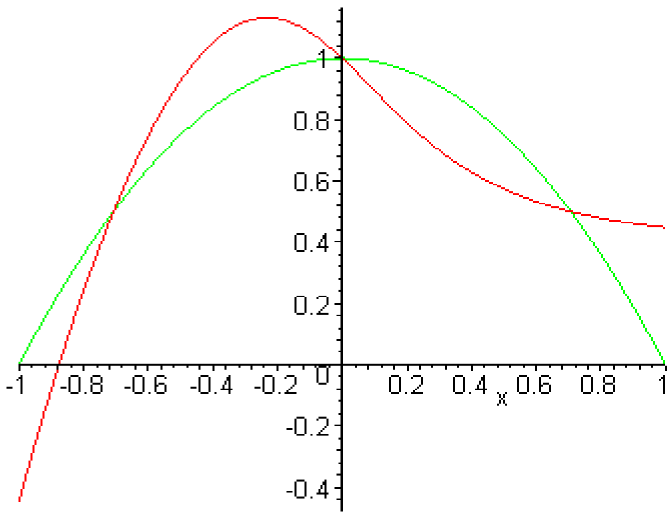
Wykresy można przedstawić jako „narysowane na osi łuku” lub w funkcji *x* (rzut punktu łuku na poziom). W tym zadaniu wybierzemy pierwszy i drugi sposób przedstawienia sił wewnętrznych. Drugi sposób, wobec tego, że wszystkie wielkości są funkcjami x, jest naturalniejszy:



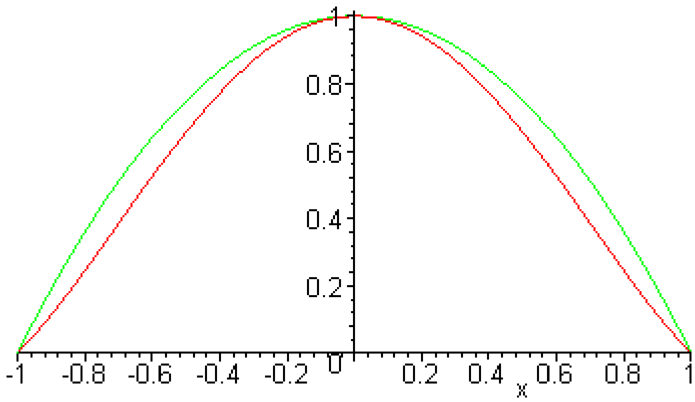
Rysunek 10.3.4. Wykres sił tnących (a), normalnych (b) i momentów zginających (c) w funkcji *x,* „na rzucie” łuku na oś poziomą. Przyjęto q=1, L=1.



a.



b.



c.

Rysunek 10.3.5. Wykres sił tnących (a), normalnych (b) i momentów zginających (c). Wartości dodatnie sił wewnętrznych na zewnątrz osi łuku. Wykres momentów jest wykreślony po stronie włókien rozciąganych. Linia jaśniejsza (zielona) to oś łuku, linia czerwona (szara na rysunku czarno-białym) to wykres. Przyjęto q=1, L=1. Wartości można odczytać z rysunku 10.3.4.