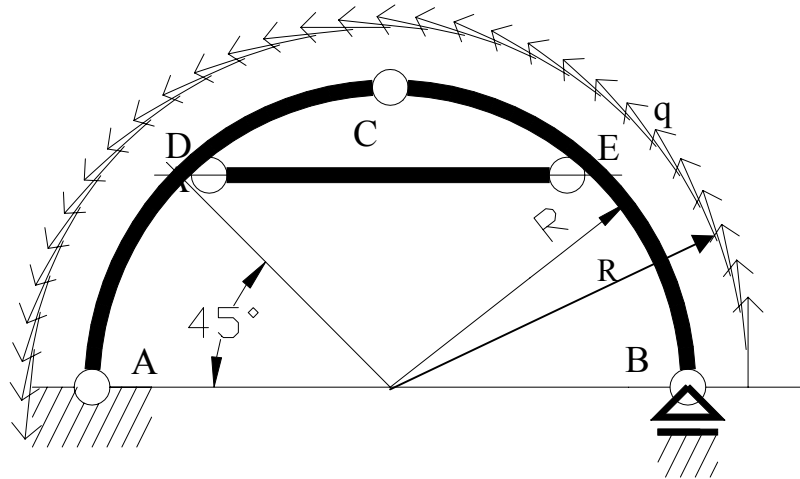


Przykład 10.4. Łuk ze ściągiem, obciążenie styczne.

Rysunek przedstawia łuk trójprzegubowy, kołowy, ze ściągiem. Łuk obciążony jest obciążeniem stycznym do łuku, o stałej gęstości q na jednostkę długości łuku (taki efekt na fragmentach łuku, oprócz parcia i ssania, daje wiatr lub opływająca ciecz). Narysować wykresy momentów gnących, sił normalnych i sił tnących w każdym punkcie osi łuku.



Rysunek 10.4.1. Łuk trójprzegubowy, kołowy, ze ściągiem. Wymiary, obciążenie, oznaczenia. Uwaga! Obciążenie przyłożone jest wzdłuż osi łuku. Na rysunku jest ono odsunięte od osi jedynie dla uniknięcia niejednoznaczności rysunku.

Rozwiązanie.

Analiza obciążenia

Obciążenie przedstawione na rysunku to obciążenie równomierne „na jednostkę długości łuku”. Obie składowe wektora wypadkowej elementarnej są (w położeniu ogólnym) różne od zera. Aby je obliczyć, zauważmy że wypadkowa jest styczna do łuku a więc współliniowa z wektorem jednostkowym $\vec{\tau}$. Współrzędne wektora $\vec{\tau}$ to cosinusy kątów jaki ten wektor tworzy z osiami Ox i Oy (odpowiednio). Znane są zawsze współrzędne wektora \vec{n} . Ponieważ $\vec{\tau}$ jest prostopadły do \vec{n} , zauważmy, że:

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} \quad \vec{\tau} = \begin{Bmatrix} \cos(\alpha + \pi/2) \\ \sin(\alpha + \pi/2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix} \quad (1)$$

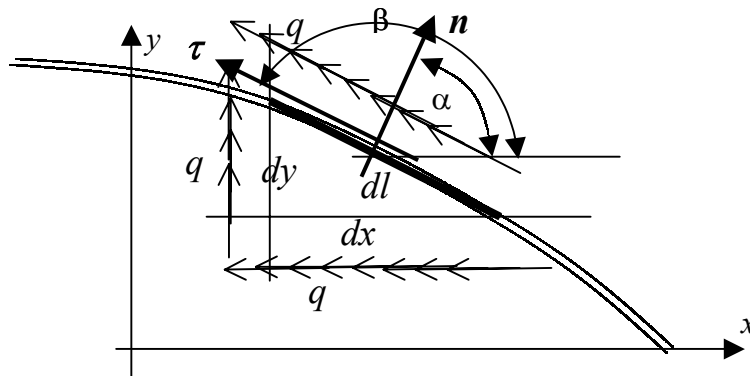
Wypadkowa elementarna wyraża się wzorami:

$$|dQ| = q dl \quad (2)$$

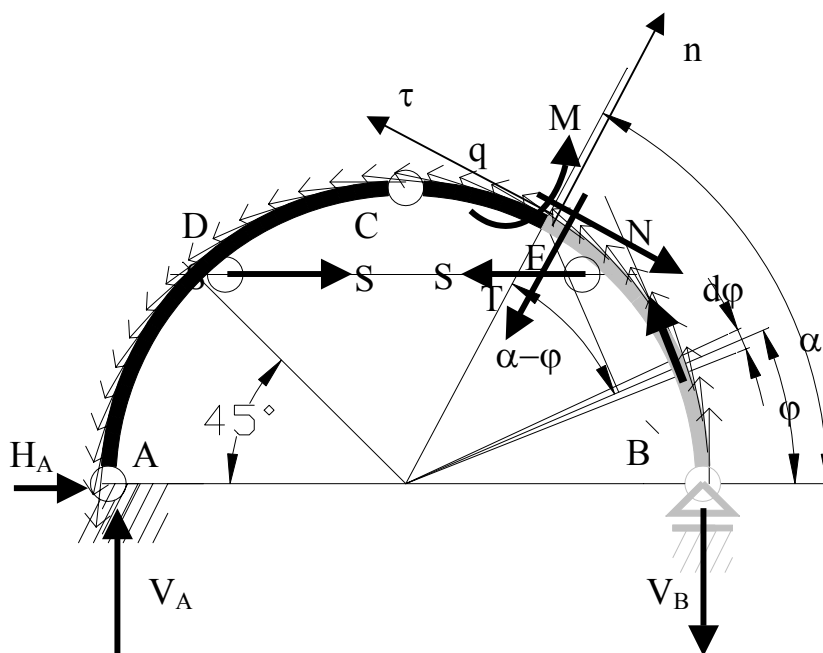
$$d\vec{Q} = q dl \vec{\tau} = q dl \begin{Bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{Bmatrix} = q dl \begin{Bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix} = q \begin{Bmatrix} -dl \sin \alpha \\ dl \cos \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q dx \\ q dy \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Rozumowanie zapisane w równaniu (3) oznacza, że rozłożono obciążenie styczne przypadające na jednostkę długości łuku na dwie składowe: poziomą $-q dx$ i pionową $q dy$ o tej samej gęstości q ale przypadające na jednostkę rzutu elementu łuku na oś poziomą i pionową. W ten sposób sprowadzono obciążenie do elementarnego przypadku podobnego do tego z

zadania 10.3. Ilustruje to rysunek 10.4.2. Od tej chwili można rozwiązać zadanie 10.4 wzorując się ściśle na zadaniu 10.3. Dla łuków niekołowych (parabola, elipsa) jest to sposób zalecany. Trzeba przy tym pamiętać, że obciążenie zastępcze przyłożone jest w punktach osi łuku (jest to zaznaczone na rysunku 10.4.3)! Jednak dla łuków kołowych łatwiej będzie wykorzystać prostą geometrię łuku i rozwiązać zadanie **nie korzystając** z powyższego rozkładu.



Rysunek 10.4.2. Infinitesimalny wycinek łuku obciążonego stycznie. Ilustracja wzoru (3), objaśnienia w tekście.



Rysunek 10.4.3. Na rysunku zaznaczono układy współrzędnych, przyjęte zwroty reakcji oraz kąty używane w obliczeniach.

Obliczenie reakcji

Kierunki i zwroty wektorów sił założone są wstępnie jak na rysunku 10.4.3, w równaniach poniżej występują tylko ich długości. Reakcje obliczymy spostrzegając, że bardzo łatwo zapisać sumę momentów dla całego układu względem środka okręgu (można tę reakcję obliczyć z sumy momentów względem punktu A ale wtedy trzeba obliczyć dłuższą całkę):

$$V_A R + V_B R - \int_0^{\pi} q R R d\alpha = 0 \quad (5)$$

Prowadzi to do równania:

$$V_A R + V_B R - \pi q R^2 = 0 \quad (6)$$

Suma rzutów na oś pionową:

$$V_A - V_B - \int_0^{\pi} q R d\alpha \cos \alpha = 0 \quad (7)$$

oczywiście, całka z rzutu wypadkowej q na oś pionowa jest równa zeru:

$$V_A - V_B = 0 \quad (8)$$

Rozwiązanie układu równań (7) i (8):

$$V_A = V_B = \frac{\pi}{2} q R = 1.570796 q R \quad (9)$$

Suma rzutów na oś pozioma dla całego układu:

$$H_A - \int_0^{\pi} q R d\alpha \sin \alpha = 0 \quad \Rightarrow H_A = 2qR \quad (10)$$

Aby obliczyć wartość S siły w ściągu przecinamy myślowo łuk w przegubie C i zapisujemy sumę momentów względem C dla części prawej (ilustracja geometryczna zapisu całki w (11) i w (12) pokazana jest na rysunku 10.4.3):

$$-S(R - R \frac{\sqrt{2}}{2}) - V_B R + \int_0^{\pi/2} q R d\alpha (R - R \sin \alpha) = 0 \quad \Rightarrow S = -\frac{2qR}{\sqrt{2}-2} = 3.4142 qR \quad (11)$$

Pręt DE jest więc ściskany. Dla sprawdzenia napiszemy sumę momentów względem punktu C dla części lewej:

$$H_A R - V_A R + S(R - R \frac{\sqrt{2}}{2}) + \int_0^{\pi/2} q R d\alpha \left(R - R \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \right) = 0 \quad \Rightarrow 0 = 0 \quad (12)$$

Zapisanie równań sił wewnętrznych

Wprowadźmy oś normalną i styczną w dowolnym przekroju π wyznaczonym punktem P na osi łuku. Osie te (na Rysunku 10.4.3 oznaczono je symbolami n i τ) skierowane są pod kątem α , który został wybrany jako zmienna niezależna.

Siłę normalną i tnącą będziemy obliczali jako rzuty na oś styczną τ (tnąca - odpowiednio na oś normalną n) wypadkowej wszystkich sił po prawej stronie przekroju π , zredukowanej do punktu P (P jest biegunem redukcji).

Moment gnący wyznaczmy jako moment wszystkich sił po prawej stronie przekroju P , otrzymany przy ich redukcji do punktu P (moment jest obliczony względem tego punktu).

Zapis równań dla sił normalnych i tnących

Równanie (13,14) jest zapisem rzutu reakcji V_B i sumy rzutów (całki) wszystkich elementarnych wypadkowych $dQ=qRd\varphi$ pomiędzy zerem (punkt B) a wartością bieżącą zmiennej niezależnej α - na oś normalną n (siły tnące T) styczną τ (siły normalne). Dla siły tnącej przyjęto znak „+” gdy jej rzut jest skierowany z lewej strony przekroju od dołu do góry lub z prawej od góry do dołu. Znak „-”, w sytuacji odwrotnej. Siła normalna ma znak „+” dla siły rozciągającej czyli wtedy, gdy rzut jest skierowany „od” przekroju, znak „-” gdy rzut jest skierowany „do” przekroju czyli dla siły ściskającej

$$T_{BE}(\alpha) = V_B \sin \alpha - \int_0^{\alpha} \sin(\alpha - \varphi) qR d\varphi \quad (13)$$

$$N_{BE}(\alpha) = V_B \cos \alpha - \int_0^{\alpha} \cos(\alpha - \varphi) qR d\varphi \quad (14)$$

Po obliczeniu całek otrzymuje się:

$$T_{BE}(\alpha) = \frac{1}{2} qR(\pi \sin \alpha + 2 \cos \alpha - 2) \quad (15)$$

$$N_{BE}(\alpha) = \frac{1}{2} qR(\pi \cos \alpha - 2 \sin \alpha) \quad (16)$$

Jeśli kąt α jest większy niż 45° , siła w ściąganiu pojawia się na prawo od przekroju w którym obliczamy siły wewnętrzne, wobec tego musi być wzięta pod uwagę:

$$T_{ED}(\alpha) = V_B \sin \alpha - \int_0^{\alpha} \sin(\alpha - \varphi) qR d\varphi - S \cos \alpha \quad (17)$$

$$N_{ED}(\alpha) = V_B \cos \alpha - \int_0^{\alpha} \cos(\alpha - \varphi) qR d\varphi + S \sin \alpha \quad (18)$$

Po obliczeniu całek otrzymuje się:

$$T_{ED}(\alpha) = \frac{qR}{2(\sqrt{2}-2)} (\pi(\sqrt{2}-2) \sin \alpha + 2\sqrt{2} \cos \alpha - 2\sqrt{2} + 4) \quad (19)$$

$$N_{ED}(\alpha) = \frac{qR}{2(\sqrt{2}-2)} (\pi(\sqrt{2}-2) \cos \alpha + 2\sqrt{2} \sin \alpha) \quad (20)$$

Gdy kąt α przekroczy 135° , siła w ściąganiu pojawia się ponownie na prawo od przekroju w którym obliczamy siły wewnętrzne. W rezultacie jej wpływ na siły wewnętrzne zredukuje się:

$$T_{DA}(\alpha) = V_B \sin \alpha - \int_0^{\alpha} \sin(\alpha - \varphi) qR d\varphi - S \cos \alpha + S \cos \alpha \quad (21)$$

$$N_{DA}(\alpha) = V_B \cos \alpha - \int_0^{\alpha} \cos(\alpha - \varphi) qR d\varphi + S \sin \alpha - S \sin \alpha \quad (22)$$

Wyrażenia dla tej części łuku są takie same jak na odcinku początkowym:

$$T_{DA}(\alpha) = \frac{1}{2}qR(\pi \sin \alpha + 2 \cos \alpha - 2) \quad (23)$$

$$N_{DA}(\alpha) = \frac{1}{2}qR(\pi \cos \alpha - 2 \sin \alpha) \quad (24)$$

Podsumowując, zapiszemy tnące i normalne w trzech przedziałach:

$$T(\alpha) = \begin{cases} T_{BE}(\alpha) & \text{dla } 0 \leq \alpha < \pi/4 \\ T_{ED}(\alpha) & \text{dla } \pi/4 \leq \alpha < 3\pi/4 \\ T_{DA}(\alpha) & \text{dla } 3\pi/4 \leq \alpha \leq \pi \end{cases} \quad (25)$$

$$N(\alpha) = \begin{cases} N_{BE}(\alpha) & \text{dla } 0 \leq \alpha < \pi/4 \\ N_{ED}(\alpha) & \text{dla } \pi/4 \leq \alpha < 3\pi/4 \\ N_{DA}(\alpha) & \text{dla } 3\pi/4 \leq \alpha \leq \pi \end{cases} \quad (26)$$

Zapis równania dla momentu gnącego

Moment wszystkich sił na prawo od P obliczony względem P zapisuje się następująco (znaki dodatnie gdy rozciągane są dolne włókna łuku):

$$M_{BE}(\alpha) = -V_B(R - R \cos \alpha) + \int_0^\alpha (R - R \cos(\alpha - \varphi))qRd\varphi \quad (27)$$

po prostych przekształceniach otrzymuje się:

$$M_{BE}(\alpha) = \frac{1}{2}qR^2(\pi \cos \alpha - \pi + 2\alpha - 2 \sin \alpha) \quad (28)$$

Moment wszystkich sił na lewo od punktu E zawiera dodatkowo siłę S działająca w ściąg:

$$M_{ED}(\alpha) = -V_B(R - R \cos \alpha) + \int_0^\alpha (R - R \cos(\alpha - \varphi))qRd\varphi + SR \sin \alpha \quad (29)$$

po prostych przekształceniach otrzymuje się:

$$M_{ED}(\alpha) = \frac{qR}{2(\sqrt{2} - 2)} \left(\pi(-\sqrt{2} + 2)\cos \alpha + \sqrt{2}(-2 \sin \alpha + 2\alpha) - 4\alpha + \pi(-\sqrt{2} + 2) + 2\sqrt{2} \right) \quad (30)$$

Gdy kąt α przekroczy 135° , siła w ściąg pojawia się ponownie na prawo od przekroju w którym obliczamy siły wewnętrzne. W rezultacie jej wpływ na siły wewnętrzne zredukuje się:

$$M_{DA}(\alpha) = -V_B(R - R \cos \alpha) + \int_0^\alpha (R - R \cos(\alpha - \varphi))qRd\varphi + SR \sin \alpha - SR \sin \alpha \quad (31)$$

po prostych przekształceniach otrzymuje się:

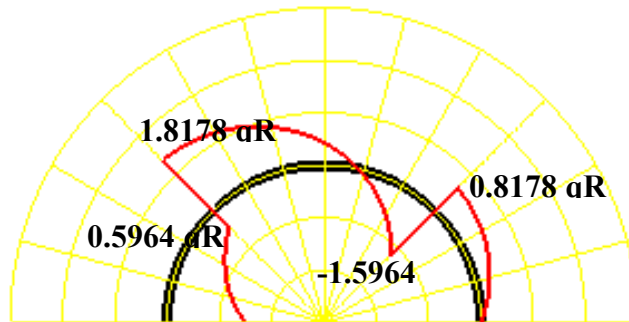
$$M_{DA}(\alpha) = \frac{1}{2}qR^2(\pi \cos \alpha - \pi + 2\alpha - 2 \sin \alpha) \quad (32)$$

Zestawienie wzorów dla trzech odcinków łuku podano poniżej:

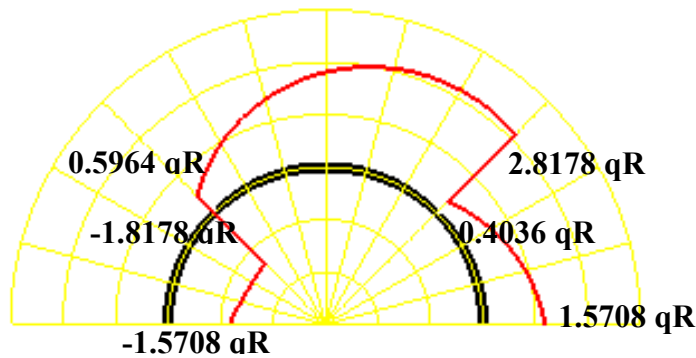
$$M(\alpha) = \begin{cases} M_{BE}(\alpha) & \text{dla } 0 \leq \alpha < \pi/4 \\ M_{ED}(\alpha) & \text{dla } \pi/4 \leq \alpha < 3\pi/4 \\ M_{DA}(\alpha) & \text{dla } 3\pi/4 \leq \alpha \leq \pi \end{cases} \quad (33)$$

Wykresy sił wewnętrznych

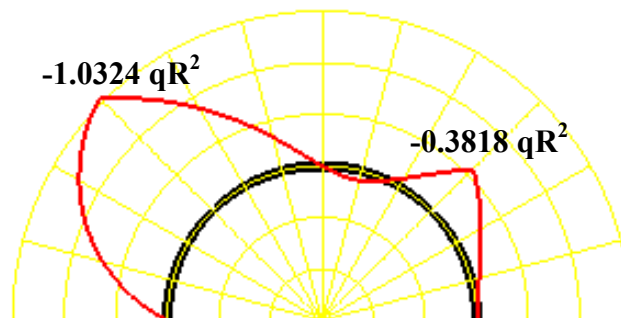
Wykresy sił wewnętrznych przedstawione jako „narysowane na osi łuku” zebrano na rysunku 10.4.4:



a.



b.

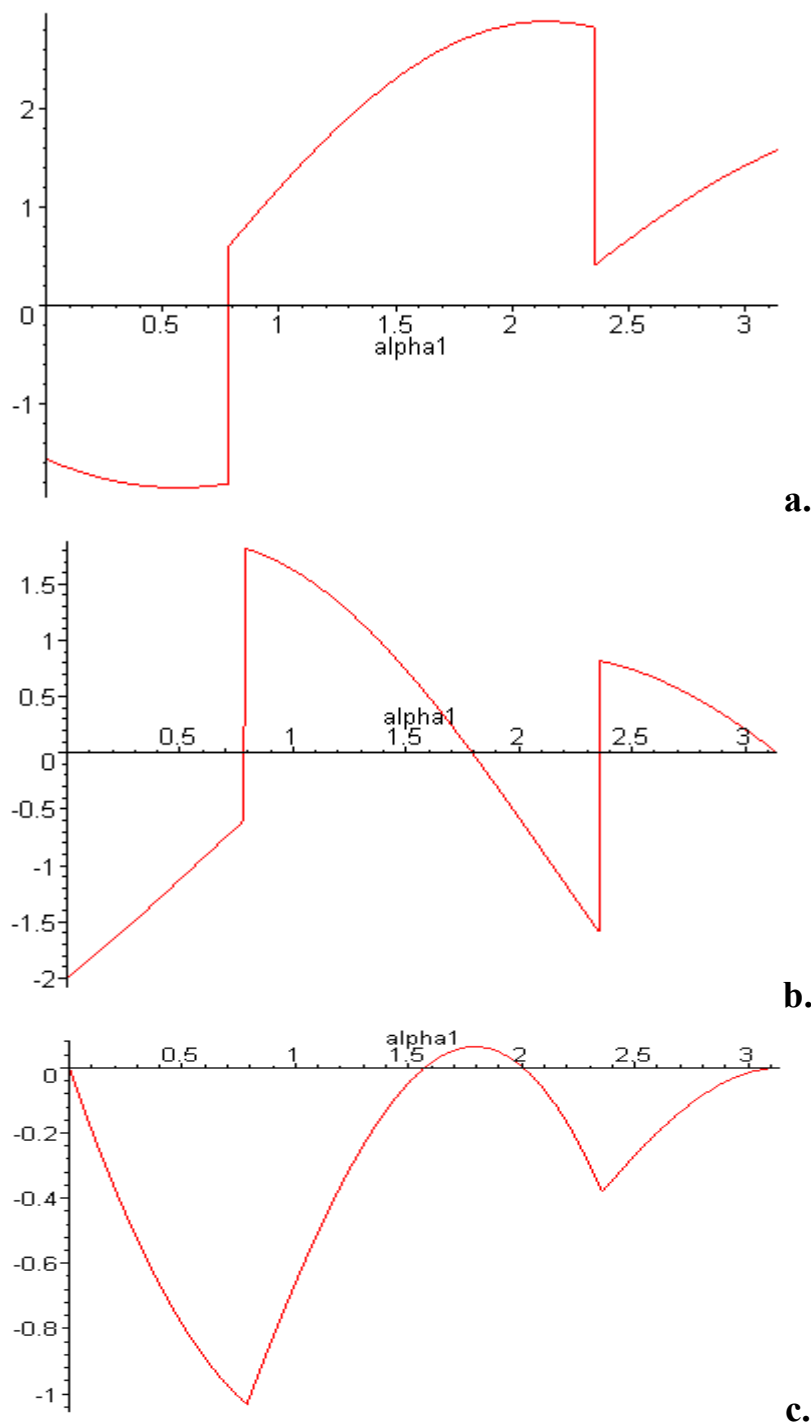


c.

Rysunek 10.4.4. Wykres sił tnących (a), normalnych (b) i momentów zginających (c).

Wartości dodatnie sił wewnętrznych na zewnątrz osi łuku. Wykres momentów jest wykreślony po stronie włókien rozciąganych. Linia ciemna pogrubiona to oś łuku, linia czerwona (szara na rysunku czarno-białym) to wykres. Przyjęto $q=1$, $L=1$. Wartości można odczytać z rysunku 10.4.5.

Te same wykresy pokazane jako funkcje kąta α_1 odmierzanego od A do B i odłożonego na osi poziomej przedstawia rysunek 10.4.5:



Rysunek 10.4.5. Wykres sił tnących (a), normalnych (b) i momentów zginających (c).

Wartości dodatnie sił wewnętrznych na zewnątrz osi łuku. Wykres momentów jest wykreślony po stronie włókien rozciąganych. Linia jaśniejsza (zielona) to oś łuku, linia czerwona (szara na rysunku czarno-białym) to wykres. Przyjęto $q=1$, $R=1$. Uwaga! Kąt α_1 jest odmierzany od podpory A do podpory B (wystarczy zastąpić we wszystkich wzorach wynikowych kąt α kątem $-\alpha+\pi$). Dzięki temu wartości na wykresie dotyczą punktu na łuku, którego rzut na oś poziomą wypada w punkcie α_1 .