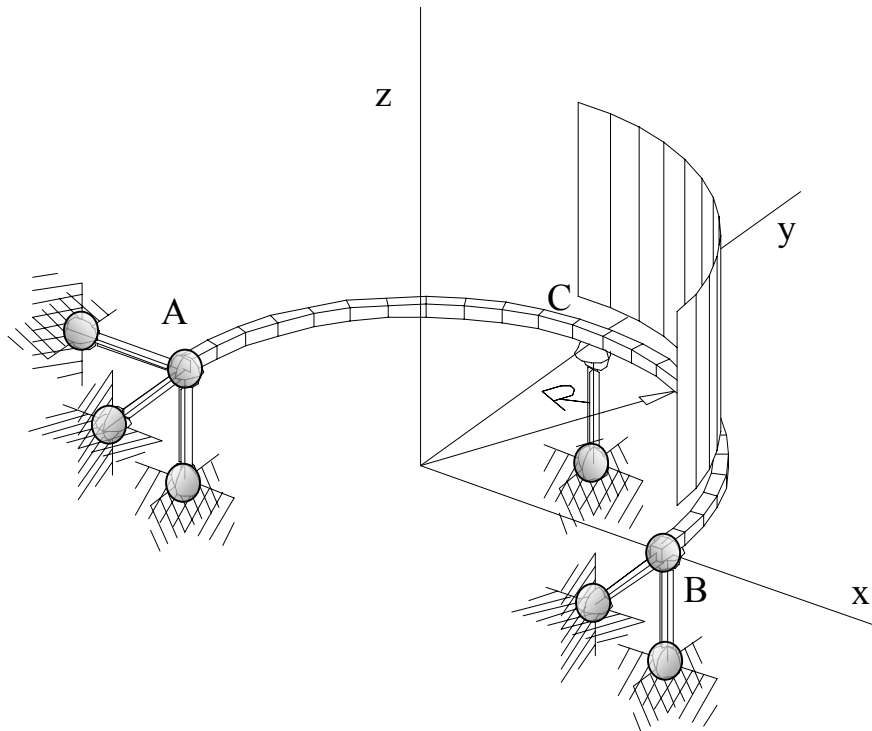
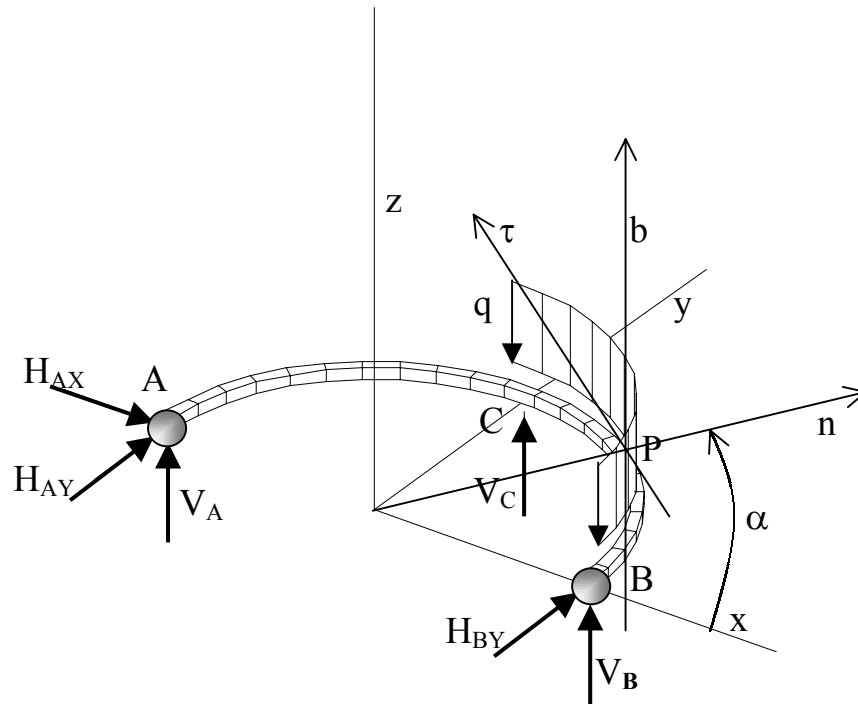


Przykład 10.5. Łuk swobodnie podparty obciążony prostopadłe do swojej płaszczyzny.

Rysunek 10.5.1. przedstawia belkę łukową, ciągłą, podpartą i obciążoną przestrzennie. Kierunek obciążenia jest prostopadły do płaszczyzny łuku. Obciążenie jest równomiernie rozłożone na połowie łuku. Ma stałą gęstość q przypadającą na jednostkę długości łuku. Narysować wykresy momentów gnących, sił normalnych i sił tnących w każdym punkcie osi łuku.



Rysunek 10.5.1. Rysunek aksonometryczny: belka łukowa, ciągła, podparta i obciążona przestrzennie. Obciążenie przedstawione jako ścianka wybudowana na części łuku, schematycznie uniesiona nad jego poziom dla lepszej widoczności. Podpory wyobrażone są jako pręty dwuprzegubowe, nieskończenie sztywne, przenoszące jedynie siłę osiową, w tym wypadku - składową reakcji. Trzy pręty połączone w punkcie A są więc odpowiednikiem podpory nieprzesuwnej, dwa pręty w punkcie B definiują podporę przesuwną w kierunku x , zaś pręt w punkcie C określa podparcie przesuwne w płaszczyźnie xy zaś nieprzesuwne w kierunku z .



Rysunek 10.5.2. Łuk uwolniony myślowo od więzów. Układy współrzędnych, przyjęte zwroty reakcji oraz oznaczenia punktów używane w obliczeniach.

Rozwiązanie.

Analiza obciążenia

Obciążenie przedstawione na rysunku to obciążenie równomierne „na jednostkę długości łuku”. Wypadkowa elementarna qdl jest wektorem równoległym do osi z . Jak w poprzednich zadaniach, wypadkowa elementarna jest przyłożona do łuku w punkcie P określonym kątem α w cylindrycznym układzie współrzędnych α, r, z , jednak wypadkowa obciążenia przypadającego na pewien odcinek łukowy – przyłożona jest w środku ciężkości tego odcinka. Obliczymy wypadkową obciążenia na ćwiartce CB łuku (jej znajomość jest przydatna do kontroli wyników lub do obliczania reakcji, w dalszym ciągu rozwiązania nie będziemy jednak wykorzystywali bezpośrednio wyników zapisanych równaniami (1-3), pozostawiając czytelnikowi użycie ich do skontrolowania wartości sił wewnętrznych w punktach charakterystycznych)

$$|dQ| = q dl = qRd\alpha \quad Q_z = |\vec{Q}| \equiv Q = \int_0^{\pi/2} qRd\alpha = \frac{\pi}{2}qR \quad Q_x = Q_y = 0 \quad (1)$$

Współrzędne punktu przyłożenia wypadkowej x_Q i y_Q obliczymy posługując się wzorem wyprowadzonym na wykładzie z Mechaniki dotyczącym układu sił równoległych:

$$x_Q = \frac{\int_0^{\pi/2} qdl R \cos \alpha}{Q} = \frac{\int_0^{\pi/2} q R^2 \cos \alpha d\alpha}{\pi q R / 2} = \frac{2R}{\pi} \quad y_Q = \frac{2R}{\pi} \quad (2)$$

Obliczenie reakcji

Kierunki i zwroty wektorów sił założone są wstępnie jak na rysunku 10.5.2, w równaniach poniżej występują tylko ich długości. Reakcje obliczymy pisząc takie równania równowagi, że w każdym z nich wystąpi tylko jedna niewiadoma reakcja. Pozwoli to na obliczenie tej reakcji z zapisanego równania.

Aby obliczyć V_C zapisano sumę momentów względem osi x:

$$-V_C R + \int_0^{\pi/2} qR d\alpha R \sin \alpha = 0 \Rightarrow -V_C R + qR^2 \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha = 0 \Rightarrow V_C = qR \quad (3)$$

Aby obliczyć V_B zapisano sumę momentów względem osi równoległej do y i poprowadzonej przez punkt A:

$$-V_B 2R - V_C R + \int_0^{\pi/2} qR d\alpha (R + R \cos \alpha) = 0 \Rightarrow -V_B 2R - V_C R + qR^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos \alpha) d\alpha = 0 \quad (4)$$

$$-2V_B - V_C + qR(1 + \pi/2) = 0 \Rightarrow V_B = \frac{\pi}{4} qR = 0.7854qR \quad (5)$$

Suma rzutów na oś pionową pozwala obliczyć V_A (wykorzystano tu (1),(3) i (5)):

$$V_A + V_B + V_C - \frac{\pi}{2} qR = 0 \Rightarrow V_A = qR \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) = -0.2146qR \quad (6)$$

Należy zauważyć, że reakcja w punkcie A jest skierowana przeciwnie niż założono (wskazuje na to jej ujemna wartość). Mimo to, w dalszych wzorach będzie ona zawsze występowała z takim znakiem jaki nakazuje założenie o jej kierunku z Rys. 10.5.2.

Pozostałe reakcje są oczywiście zerowe, co łatwo samodzielnie wykazać.

Zapisanie równań sił wewnętrznych

Wprowadźmy oś normalną \mathbf{n} , styczną $\boldsymbol{\tau}$ i binormalną \mathbf{b} (normalna do płaszczyzny łuku) w dowolnym przekroju π wyznaczonym punktem P na osi łuku. Osie te zaznaczono na Rysunku 10.5.2. Oś \mathbf{n} tworzy z osią x kąt α , który został wybrany jako zmienna niezależna.

Wektor siły przekrojowej rozłożymy na trzy składowe na osiach lokalnego układu współrzędnych $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{b}$. Jej składowa na osi $\boldsymbol{\tau}$ to siła normalna N , na osi \mathbf{n} to tnąca T_n , na osi \mathbf{b} – tnąca T_b (poprzeczna).

Siłę normalną i siły tnące będziemy obliczali jako rzuty na oś styczną $\boldsymbol{\tau}$ (tnące - odpowiednio na oś normalną \mathbf{n} i \mathbf{b}) wypadkowej wszystkich sił po prawej stronie przekroju π , zredukowanej do punktu P (P jest biegunem redukcji).

Moment przekrojowy \mathbf{M} rozłożymy na trzy składowe: Moment skręcający \mathbf{M}_s – rzut \mathbf{M} na oś $\boldsymbol{\tau}$, moment gnący \mathbf{M}_b – rzut \mathbf{M} na oś \mathbf{b} oraz moment gnący poprzeczny \mathbf{M}_n – rzut \mathbf{M} na oś \mathbf{n} . Zauważmy, że we wszystkich zadaniach płaskich 10.1. do 10.4. występował jedynie moment \mathbf{M}_b , mimo, że oś \mathbf{b} nie została tam wyraźnie zdefiniowana.

Moment skręcający wyznaczymy jako moment wszystkich sił po prawej stronie przekroju P, otrzymany przy ich redukcji do punktu P (moment jest obliczony względem osi $\boldsymbol{\tau}$ przechodzącej przez P).

Momenty gnące wyznaczymy jako momenty wszystkich sił po prawej stronie przekroju P, otrzymane przy ich redukcji do punktu P (momenty te są obliczane następująco: \mathbf{M}_b – wokół osi \mathbf{b} poprowadzonej przez P, \mathbf{M}_n – wokół osi \mathbf{n} poprowadzonej w punkcie P).

Zapis równań dla sił normalnych i tnących

Ponieważ wszystkie siły na prawo od P (na lewo także...) są prostopadłe do \mathbf{n} oraz do $\boldsymbol{\tau}$ więc Siły normalne i tnące T_n są równe zero na całym łuku. Pozostaje do określenia zmienność tnącej poprzecznej T_b w funkcji kąta α .

Równanie (7) jest zapisem rzutu reakcji V_B i sumy rzutów (całki) wszystkich elementarnych wypadkowych $dQ=qRd\varphi$ pomiędzy zerem (punkt B) a wartością bieżącą zmiennej niezależnej α - na oś binormalną \mathbf{b} (siły tnącej poprzecznej T_b). Jest ono ważne tylko dla α mniejszego niż $\pi/2$. Dla siły tnącej poprzecznej przyjęto znak „+” gdy jej rzut jest skierowany z lewej strony przekroju od dołu do góry lub z prawej od góry do dołu. Znak „-”, w sytuacji odwrotnej.

$$T_{BC}(\alpha) = -V_B + \int_0^{\alpha} qRd\varphi \Rightarrow T_{BC}(\alpha) = qR\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \text{ dla } \alpha < \pi/2 \quad (7)$$

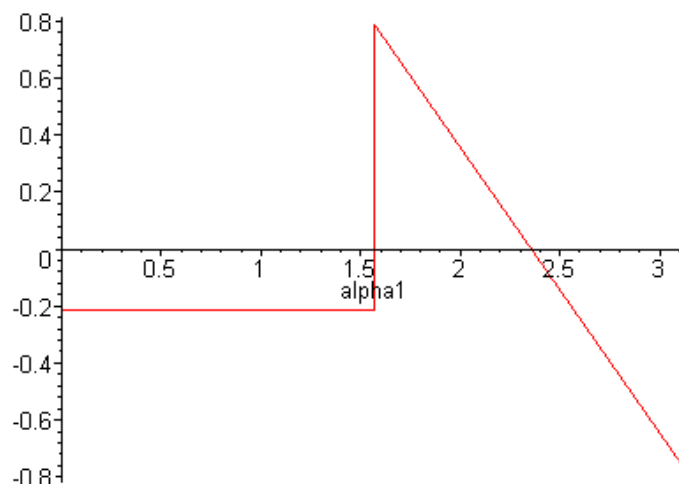
Dla α większego niż $\pi/2$ pojawia się dodatkowo reakcja w punkcie C, który teraz jest na prawo od przekroju P:

$$T_{CA}(\alpha) = -V_B - V_C + \int_0^{\pi/2} qRd\varphi \Rightarrow T_{CA}(\alpha) = qR\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) \text{ dla } \alpha > \pi/2 \quad (8)$$

Podsumowując, zapiszemy tnące poprzeczne w dwu przedziałach:

$$T(\alpha) = \begin{cases} T_{BC}(\alpha) & \text{dla } 0 \leq \alpha < \pi/2 \\ T_{CA}(\alpha) & \text{dla } \pi/2 \leq \alpha < \pi \end{cases} \quad (9)$$

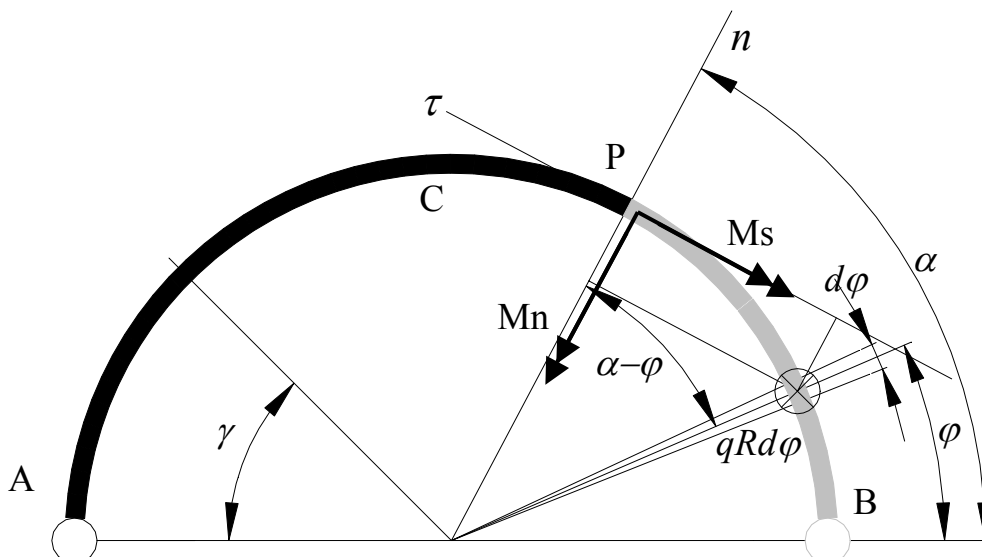
Wykresy tnącej poprzecznej T_b jako funkcji kąta α odmierzanego na osi poziomej przedstawia rysunek 10.5.5:



Rysunek 10.5.3. Wykres tnącej poprzecznej T_b jako funkcji kąta α_1 odkładanego na osi poziomej. Przyjęto $q=1$, $R=1$. Uwaga! Kąt α_1 jest odmierzany od podpory A do podpory B (wystarczy zastąpić we wszystkich wzorach wynikowych kąt α kątem $-\alpha+\pi$). Dzięki temu wartości na wykresie dotyczą punktu na łuku, którego rzut na oś poziomą wypada w punkcie α_1 . Podpora A wypada w zerze, B - dla $\alpha_1=\pi$.

Zapis równania dla momentu skręcającego

Wszystkie oznaczenia potrzebne do obliczenia momentu elementarnej wypadkowej pionowej względem lokalnych osi stycznej i normalnej podane są na Rys.10.5.4. Zaznaczono też na nim odpowiednie kąty i odległości pojawiające się we wzorach poniżej.



Rysunek 10.5.4. Rzut łuku. Układy współrzędnych, przyjęte zwroty momentów oraz oznaczenia wielkości używane w obliczeniach.

Moment wszystkich sił na prawo od P obliczony wokół osi τ poprowadzonej przez punkt P zapisuje się następująco (znaki dodatnie gdy wektor momentu skierowany jest od przekroju):

$$M_{s_{BC}}(\alpha) = -V_B(R - R \cos \alpha) + \int_0^{\alpha} (R - R \cos(\alpha - \varphi)) q R d\varphi \quad (10)$$

po prostych przekształceniach otrzymuje się:

$$M_{s_{BC}}(\alpha) = \frac{1}{4} q R^2 (\pi \cos \alpha - \pi + 4\alpha - 4 \sin \alpha) \quad (11)$$

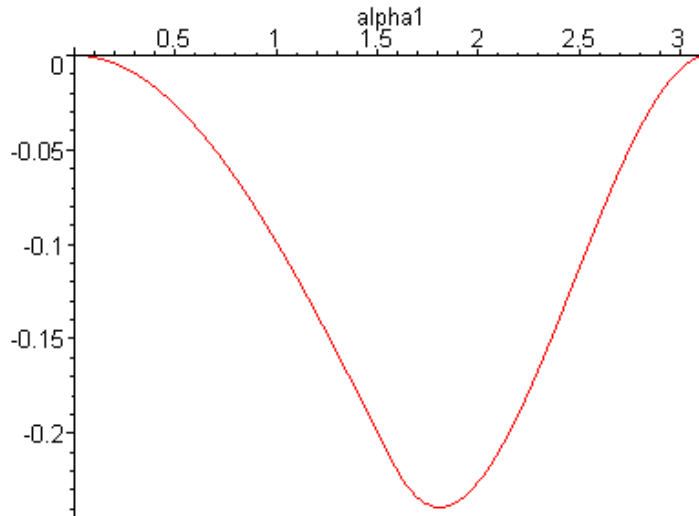
Kiedy punkt P znajdzie się na lewo od punktu C, moment wszystkich sił po prawej stronie punktu P będzie zawierał dodatkowo reakcje w punkcie C. Aby uniknąć tej dodatkowej siły w równaniu określmy kąt γ liczony od punktu A zgodnie z ruchem wskazówek zegara i obliczmy moment wszystkich sił na lewo od P obliczony względem osi τ poprowadzonej przez punkt P w funkcji kąta γ . Tak jest łatwiej gdyż po lewej stronie uwzględniamy tylko reakcję V_A :

$$M_{s_{AC}}(\alpha) = V_A(R - R \cos \gamma) = qR \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) (R - R \cos \gamma) \quad (12)$$

Zestawienie wzorów dla dwu odcinków łuku podano poniżej:

$$M_s(\alpha) = \begin{cases} M_{s_{BC}}(\alpha) & \text{dla } 0 \leq \alpha < \pi/2 \\ M_{s_{AC}}(-\alpha + \pi) & \text{dla } \pi/2 \leq \alpha < \pi \end{cases} \quad (13)$$

Wykresy momentu skręcającego jako funkcja kąta α odmierzanego na osi poziomej przedstawia rysunek 10.5.5:



Rysunek 10.5.5. Wykres momentu skręcającego jako funkcja kąta α_1 odkładanego na osi poziomej. Przyjęto $q=1$, $R=1$. Uwaga! Kąt α_1 jest odmierzany od podpory A do podpory B (wystarczy zastąpić we wszystkich wzorach wynikowych kąt α kątem $-\alpha+\pi$). Dzięki temu wartości na wykresie dotyczą punktu na łuku, którego rzut na oś poziomą wypada w punkcie α_1 . Podpora A wypada w zerze, B - dla $\alpha_1=\pi$.

Zapis równania dla momentu gnącego

Moment wszystkich sił na prawo od P obliczony względem osi n poprowadzonej przez P zapisuje się następująco (znaki dodatnie gdy rozciągane są dolne włókna łuku):

$$Mn_{BC}(\alpha) = V_B R \sin \alpha - \int_0^{\alpha} R \sin(\alpha - \varphi) q R d\varphi \quad (14)$$

po prostych przekształceniach otrzymuje się:

$$Mn_{BC}(\alpha) = qR^2 \left(\frac{\pi}{4} \sin \alpha - 1 + \cos \alpha \right) \quad (15)$$

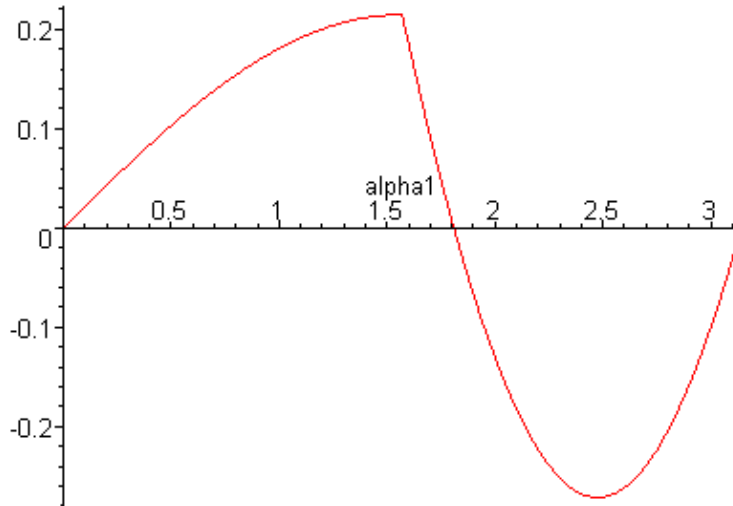
Moment wszystkich sił na lewo od punktu C zawiera jedynie reakcję V_A . Do zapisu momentu sił z lewej strony punktu P użyjemy kąta γ zdefiniowanego dla równania (12):

$$Mn_{AC}(\gamma) = V_A R \sin \gamma = qR \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) R \sin \gamma \quad (16)$$

Zestawienie wzorów dla dwu odcinków łuku podano poniżej:

$$Mn(\alpha) = \begin{cases} Mn_{BC}(\alpha) & \text{dla } 0 \leq \alpha < \pi/2 \\ Mn_{AC}(-\alpha + \pi) & \text{dla } \pi/2 \leq \alpha < \pi \end{cases} \quad (17)$$

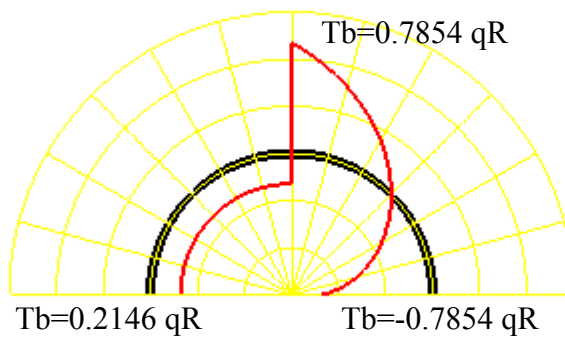
Wykresy momentu skręcającego jako funkcja kąta α odmierzanego na osi poziomej przedstawia rysunek 10.5.5:



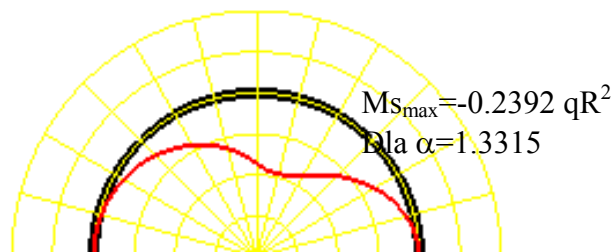
Rysunek 10.5.6. Wykres momentu gnącego jako funkcji kąta α_1 odmierzanego na osi poziomej. Przyjęto $q=1$, $R=1$. Uwaga! Kąt α_1 jest odmierzany od podpory A do podpory B (wystarczy zastąpić we wszystkich wzorach wynikowych kąt α kątem $-\alpha+\pi$). Dzięki temu wartości na wykresie dotyczą punktu na łuku, którego rzut na oś poziomą wypada w punkcie α_1 . Podpora A wypada w zerze, B - dla $\alpha_1=\pi$.

Wykresy sił wewnętrznych

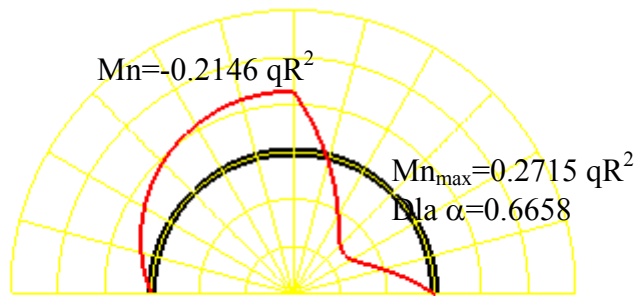
Wykresy sił wewnętrznych przedstawione jako „narysowane na osi łuku” zebrano na rysunku 10.5.7:



a.



b.



c.

Rysunek 10.5.7. Wykres sił tnących (a), normalnych (b) i momentów zginających (c). Wartości dodatnie tnącej - na zewnątrz osi łuku. Wykres tnącej należy sobie wyobrazić jako wykreślony w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny łuku (na powierzchni cylindra, o półkolu w podstawie. Również wykres momentów gnących powinien być wykreślony w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny łuku. Linia ciemna pogrubiona to oś łuku, linia czerwona (szara na rysunku czarno-białym) to wykres. Przyjęto $q=1$, $R=1$.