Wprowadzenie

Naprężenia normalne σ wywołane siłą podłużną N(x) mają stały rozkład na powierzchni przekroju i wynoszą

$$\boxed{\sigma(x) = \frac{N(x)}{A}}$$

gdzie: A oznacza pole przekroju poprzecznego pręta [m^2].

Wydłużeniem ΔL nazywamy różnicę między długością pręta odkształconego a jego długością początkową. Ujemna wielkość ΔL oznacza skrócenie pręta.
Względną zmianę długości pręta po odkształceniu nazywamy *odkształceniem podłużnym*.
Odkształcenie to określa się następująco:

$$\boxed{\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{N(x)}{EA}}$$

gdzie: A oznacza pole przekroju poprzecznego pręta [m^2]
E oznacza moduł sprężystości podłużnej materiału pręta – moduł Younga [N/m^2]

<u>Równania fizyczne</u> określają odkształcenia wywołane przyczynami fizycznymi: siłami, zmienną temperaturą.
Dla cylindrycznego pręta jednorodnego o długości L zmiana długości wywołana stałą siłą podłużną S wynosi

$$\boxed{\Delta L = \int_0^L \varepsilon(x)dx = \int_0^L \frac{S}{EA}dx = \frac{SL}{EA}}$$

Dla pionowego, cylindrycznego pręta jednorodnego o długości L zmiana długości wywołana jego ciężarem własnym γ wynosi

$$\boxed{\Delta L = \int_0^L \varepsilon(x)dx = \int_0^L \frac{\gamma A x}{E}dx = \frac{\gamma L^2}{2E}}.$$

Oznaczając ciężar całkowity pręta równy γAL jako G możemy wydłużenie to zapisać jako

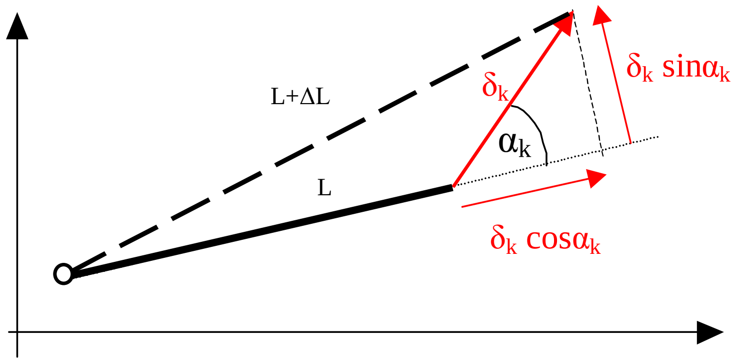
$$\boxed{\Delta L = \frac{GL}{2EA}}.$$

Dla jednorodnego pręta o długości L wydłużenie wywołane równomiernym przyrostem temperatury o Δt [˚C] wynosi

$$\boxed{\Delta L = \alpha_t \Delta t L}$$

gdzie: α_t oznacza współczynnik rozszerzalności liniowej materiału pręta [1/˚C].

<u>Równania geometryczne</u> zawierają zależności między przemieszczeniami końców pręta a jego wydłużeniem. Załóżmy, że pręt o długości L po odkształceniu zajmuje położenie oznaczone na rysunku linią przerywaną i jego długość wynosi L+ ΔL. Dla uproszczenia jeden koniec nie zmienia położenia, a przemieszczenie drugiego określa wektor δ_k.



Analizując powyższy rysunek możemy zapisać, że długość pręta odkształconego wynosi

$$(L+\Delta L)^2 = (L+ \delta_k \cos \alpha_k)^2 + (\delta_k \sin \alpha_k)^2$$

co po rozwinięciu i uproszczeniu daje równanie

$$2L\ \Delta L+(\Delta L)^2 = 2L\ \delta_k \cos \alpha_k + \delta_k^2$$

Po podzieleniu stronami przez L^2 otrzymamy

$$2\left(\frac{\Delta L}{L}\right)+\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 = 2\left(\frac{\delta_k \cos\alpha_k}{L}\right)+\left(\frac{\delta_k}{L}\right)^2$$

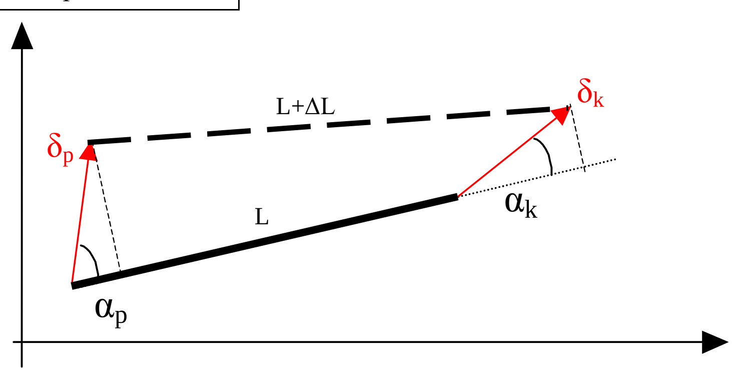
Odkształcenia $\left(\frac{\Delta L}{L}\right)$ są wielkościami małymi, co oznacza, że ich kwadraty $\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2$ są małymi drugiego rzędu i mogą być pominięte, podobnie jak $\left(\frac{\delta_k}{L}\right)^2$. Uproszczenie to prowadzi do zależności:

$$\boxed{\Delta L = \delta_k \cos\alpha_k},$$

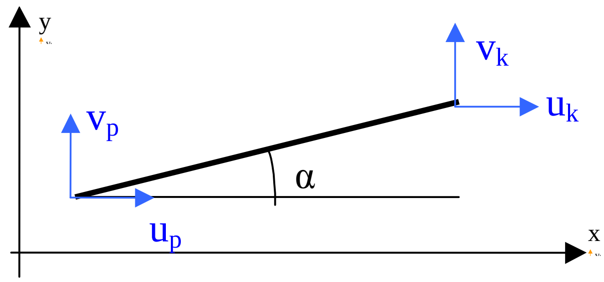
która oznacza, że **wydłużenie pręta równe jest rzutowi przemieszczenia jego końca na kierunek pręta**. Przemieszczenie w kierunku prostopadłym do osi pręta nie powoduje zmiany jego długości. Wektor przemieszczenia, który rzutuje się na pręt powoduje skrócenie pręta, czyli przy wydłużeniu ΔL należy uwzględnić znak minus.

Uogólniając powyższą analizę na przypadek dowolny – gdy oba końce pręta mogą się przemieszczać – wydłużenie pręta wyrażone przez przemieszczenia jego początku δ_p i końca δ_k wynosi:

$$\boxed{\Delta L = -\delta_p \cos\alpha_p + \delta_k \cos\alpha_k}.$$



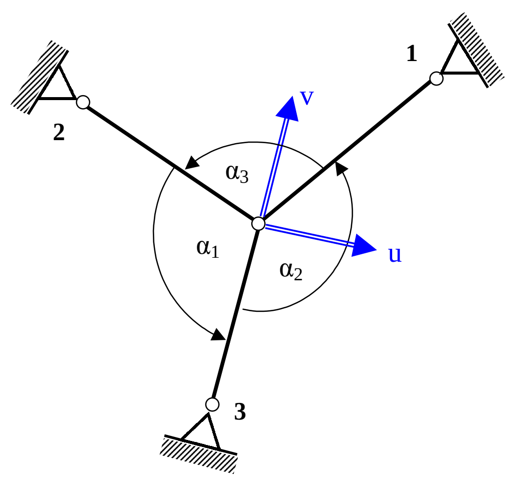
Do obliczeń wygodniejsze jest posługiwanie się składowymi prostokątnymi przemieszczeń końców pręta przedstawionymi na rysunku poniżej.



Pozwala to zapisać warunek geometryczny w najbardziej ogólnej postaci

$$\boxed{\Delta L = (u_k - u_p)\cos\alpha + (v_k - v_p)\sin\alpha}. \qquad (1)$$

Rozpatrzmy pokazany na rysunku poniżej układ trzech dwuprzegubowych prętów połączonych przegubowo w węźle centralnym.



Wydłużenia prętów tego układu nie mogą być dowolne. Wydłużenia dwu prętów układu wyznaczają jednoznacznie przemieszczenie węzła centralnego, a zatem wyznaczają również w sposób jednoznaczny wydłużenie trzeciego pręta.

Korzystając ze wzoru (1) możemy wyrazić wydłużenia prętów układu za pośrednictwem składowych (u,v) wektora przemieszczenia węzła centralnego:

$$\Delta l_1 = -u\cos(\alpha_2 - \pi/2) - v\sin(\alpha_2 - \pi/2) = -u\sin\alpha_2 + v\cos\alpha_2$$

$$\Delta l_2 = u\cos(\alpha_1 - \pi/2) - v\sin(\alpha_1 - \pi/2) = u\sin\alpha_1 + v\cos\alpha_1$$

$$\Delta l_3 = v$$

Eliminując v otrzymujemy

$$\Delta l_1 = -u\sin\alpha_2 + \Delta l_3\cos\alpha_2$$

$$\Delta l_2 = u\sin\alpha_1 + \Delta l_3\cos\alpha_1$$

a eliminując u mamy

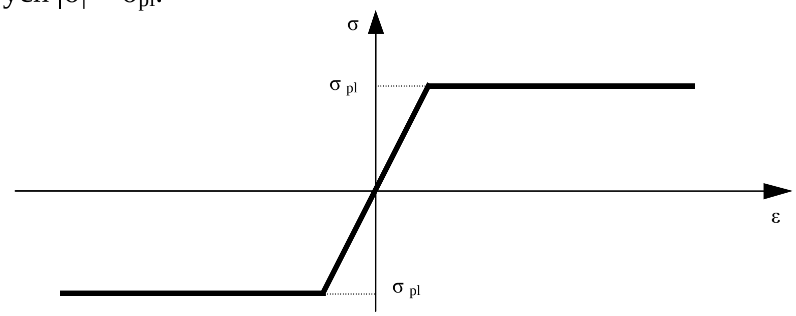
$$\Delta l_1\sin\alpha_1 + \Delta l_2\sin\alpha_2 = \Delta l_3(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2) = \Delta l_3\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = -\Delta l_3\sin\alpha_3$$

Ostatecznie wykazaliśmy, że w rozpatrywanym przypadku

$$\Delta l_1\sin\alpha_1 + \Delta l_2\sin\alpha_2 + \Delta l_3\sin\alpha_3 = 0\,.$$

Nośność graniczna

W stanie granicznym pracy konstrukcji wykonanej z materiału o wyraźnej granicy plastyczności warunek dopuszczalności naprężeń $|\sigma| \leq \sigma_{dop}$ zakładający zakres sprężysty naprężeń zostaje zastąpiony przez warunek plastyczności zakładający, że w całej konstrukcji $|\sigma| \leq \sigma_{pl}$. Dopuszcza on pojawienie się procesu plastycznego płynięcia tych części konstrukcji, w których $|\sigma| = \sigma_{pl}$.



Procesowi plastycznego płynięcia zwykle towarzyszą duże deformacje konstrukcji, dyskwalifikujące jej użyteczność. Z tego względu taki stan uważany jest za stan graniczny.

Metoda statyczna

W metodzie statycznej poszukujemy największego obciążenia konstrukcji, przy którym możliwe jest spełnienie warunków równowagi i naprężeniowych (statycznych) warunków plastyczności: $|\sigma| \leq \sigma_{pl}$.
Jeżeli uda nam się znaleźć maksimum obciążenia, to wówczas można łatwo znaleźć towarzyszący takiemu stanowi mechanizm zniszczenia spełniający warunek plastycznego płynięcia.
W tej metodzie nie analizujemy ani odkształceń ani przemieszczeń.

Metoda kinematyczna

W metodzie kinematycznej poszukujemy najmniejszego obciążenia, przy którym możliwy jest mechanizm zniszczenia spełniający warunki równowagi i warunek plastycznego płynięcia. W metodzie tej często wygodniej jest warunek równowagi spełnić w postaci zasady prac przygotowanych przyjmując przemieszczenia przygotowane wynikające z założonego mechanizmu zniszczenia.
Jeżeli uda się znaleźć takie minimum, to można wówczas łatwo znaleźć towarzyszący mu stan naprężenia spełniający naprężeniowy warunek plastyczności.
Może się zdarzyć, że danemu obciążeniu granicznemu odpowiadają różne mechanizmy zniszczenia.