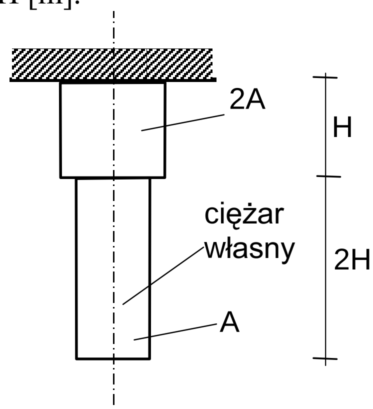
Przykład 1.1. Wyznaczenie naprężeń, odkształceń i przemieszczeń w słupie o zmiennym przekroju

Wyznaczyć rozkłady siły normalnej, naprężeń, odkształceń i przemieszczeń wywołane ciężarem własnym γ [N/m^3] pręta o skokowo zmiennym przekroju przedstawionym na rysunku. Materiał pręta jest jednorodny o znanym module Younga E [N/m^2], pole przekroju poprzecznego A[m^2] i długość H [m].



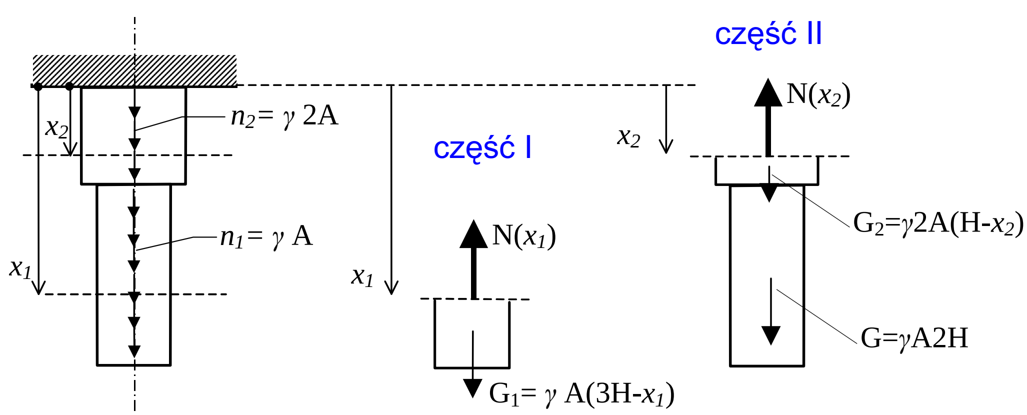
Rozwiązanie

- *wyznaczenie siły normalnej N*

Obciążenie ciężarem własnym zredukowane do osi pręta daje liniowe obciążenie osiowe o natężeniu $n(x) = \gamma A(x)$. Ponieważ przekrój pręta zmienia się, więc obciążenie to będzie miało wartości przedziałami stałe: $n_1 = \gamma A$

$n_2 = \gamma 2A$

Do wyznaczenia siły normalnej wprowadzimy przekroje wyznaczone rzędnymi x_1 i x_2 (jak na rysunku). Oddzielone tymi przekrojami części z ich ciężarami oraz uzewnętrznioną siłą przekrojową N przedstawia rysunek poniżej.



Z warunku równowagi sił dla tak wydzielonej części I znajdujemy wartość siły normalnej $N(x_1)$ w dowolnym przekroju dla x_1 z przedziału (H,3H).

$$\sum P_{ix} = 0 \Rightarrow \quad N(x_1) - G_1 = 0 \quad \text{i stąd } N(x_1) = 3\gamma AH - \gamma A x_1.$$

Siła G_1 oznacza ciężar części pręta odciętej przekrojem, który obliczony został jako iloczyn ciężaru objętościowego γ i objętości tej części (iloczyn obciążenia n_1 i odległości x_1).

W przekroju x_1=H konieczne jest uwzględnienie zmiany natężenia obciążenia, która wynika ze zmiany pola powierzchni przekroju poprzecznego pręta. Wprowadzamy w tym celu zmienną x_2.

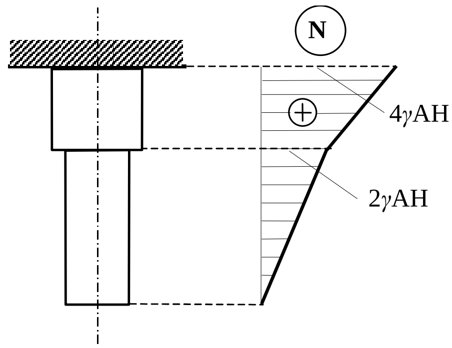
Z warunku równowagi sił dla tak wydzielonej części II znajdujemy wartość siły normalnej $N(x_2)$ w dowolnym przekroju dla x_2 z przedziału (0,H).

$$\sum P_{ix} = 0 \Rightarrow N(x_2) - G - G_2 = 0 \text{ i stąd } N(x_2) = 2\gamma AH + \gamma 2A\,(H - x_2) = 2\gamma A(2H - x_2).$$

Siła G oznacza ciężar części pręta o polu powierzchni przekroju poprzecznego równym A, a G_2 – ciężar fragmentu części pręta o polu powierzchni przekroju poprzecznego równym 2A oddzielonego rzędną x_2.

Największą wartość siła normalna osiąga dla $x_2 = 0$ i wynosi $4\gamma AH$.

Wykres siły normalnej przedstawia rysunek poniżej.



Jak wynika z wykresu, nachylenie wykresu siły normalnej jest proporcjonalne do pola powierzchni pręta (przy stałym ciężarze γ).

- *wyznaczenie naprężeń normalnych σ*

Naprężenie wywołane siłą normalną rozłożone jest równomiernie w całym przekroju i jego wartość określona jest zależnością:

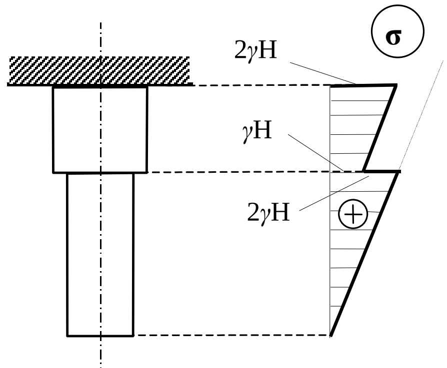
$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}.$$

Z uwagi na zmienny przekrój pręta, konieczne jest rozważenie dwóch przedziałów zmienności. I tak:

dla x z przedziału (0, H) $\quad \sigma(x_2) = \dfrac{N(x_2)}{2A} = \dfrac{4\gamma AH - 2\gamma A x_2}{2A} = \gamma(2H - x_2)$

i dla x z przedziału (H,3H) $\quad \sigma(x_1) = \dfrac{N(x_1)}{A} = \dfrac{\gamma A(3H - x_1)}{A} = \gamma(3H - x_1).$

Wykres naprężeń normalnych przedstawiony jest na rysunku poniżej.



Ważnym wnioskiem, odczytanym z wykresu, jest jednakowe nachylenie wykresów w obu przedziałach, co oznacza, że zmienność naprężeń nie zależy od pola powierzchni przekroju a jedynie od wartości ciężaru własnego. Nieciągłość wykresu naprężeń w przekroju x_1=H wynika z nieciągłości (skokowej zmiany) przekroju pręta w tym miejscu.

- *wyznaczenie odkształceń ε*

Odkształcenia *ε* odpowiadające naprężeniom σ określa prawo Hoocke'a

$$\varepsilon(\mathrm{x}) = \frac{\sigma(\mathrm{x})}{\mathrm{E}},$$ gdzie E oznacza moduł Younga.

Rozkład odkształceń wzdłuż długości pręta jest taki jak naprężeń (zmniejszony przez mnożnik 1/E).
Wydłużenie pręta o długości L obliczamy jako

$$\Delta \mathrm{L} = \int_{o}^{L} \varepsilon(x) \mathrm{d}x \, .$$

Wydłużenie analizowanego pręta wynosić będzie

$$\Delta \mathrm{L} = \frac{1}{\mathrm{E}} \int_{o}^{H} \sigma(x_2) \mathrm{d}x_2 + \frac{1}{\mathrm{E}} \int_{H}^{3H} \sigma(x_1) \mathrm{d}x_1 \, .$$

Uwzględniając obliczone wcześniej naprężenia otrzymujemy całkowite wydłużenie równe

$$\Delta \mathrm{L} = \frac{1}{\mathrm{E}} \int_{0}^{H} \gamma(2\mathrm{H} - x_2) \mathrm{d}x_2 + \frac{1}{\mathrm{E}} \int_{H}^{3H} \gamma(3\mathrm{H} - x_1) \mathrm{d}x_1 = \frac{3\gamma \mathrm{H}^2}{2\mathrm{E}} + \frac{\gamma 4\mathrm{H}^2}{2\mathrm{E}} = \frac{7}{2} \frac{\gamma \mathrm{H}^2}{\mathrm{E}} \, .$$

- *wyznaczenie przemieszczeń u*

Przemieszczenie przekroju położonego w odległości x od swobodnego końca pręta będzie równe wydłużeniu części pręta leżącej powyżej tego przekroju.

$$\mathrm{u}(x_1) = \Delta \mathrm{l}(x_1) = \int_{0}^{H} \varepsilon(x_2) \mathrm{d}x_2 + \int_{H}^{x_1} \varepsilon(x_1) \mathrm{d}x_1 \, .$$

$$\mathrm{u}(x_2) = \Delta \mathrm{l}(x_2) = \int_{0}^{x_2} \varepsilon(x_2) \mathrm{d}x_2 \, .$$

Podstawiając znane już odkształcenia otrzymamy równania przemieszczeń:

w przedziale (0, H)

$$\mathrm{u}(x_2) = \int_{0}^{x_2} \frac{\gamma(2\mathrm{H} - x_2)}{\mathrm{E}} \mathrm{d}x_2 = \frac{\gamma}{2\mathrm{E}} \left(4\mathrm{H}x_2 - {x_2}^2\right).$$

w przedziale (H, 3H)

$$\mathrm{u}(x_1) = \int_{0}^{H} \frac{\gamma(2\mathrm{H} - x_2)}{\mathrm{E}} \mathrm{d}x_2 + \int_{H}^{x_1} \frac{\gamma(3\mathrm{H} - x_1)}{\mathrm{E}} \mathrm{d}x_1 =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{\gamma \mathrm{H}^2}{\mathrm{E}} + \frac{\gamma}{\mathrm{E}} \left(3\mathrm{H}x_1 - \frac{{x_1}^2}{2} - \frac{5}{2}\mathrm{H}^2 \right) = \frac{\gamma}{\mathrm{E}} \left(3\mathrm{H}x_1 - \frac{{x_1}^2}{2} - \mathrm{H}^2 \right)$$

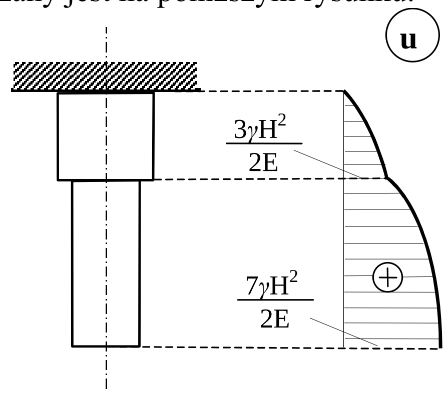
Oczywiste jest, że przemieszczenie końca swobodnego pręta powinno być identyczne z wcześniej obliczonym całkowitym wydłużeniem. Podstawiając x_1=3H w równaniu przemieszczeń otrzymujemy potwierdzenie, że

$$u(x_1 = 3H) = \frac{\gamma}{E}\left(9H^2 - \frac{9}{2}H^2 - H^2\right) = \frac{7\gamma H^2}{2E}.$$

Równie oczywistym sprawdzeniem jest brak przemieszczenia końca zamocowanego. Podstawiając x_2=0 rzeczywiście otrzymujemy

$$u(x_2 = 0) = 0.$$

Wykres przemieszczeń pokazany jest na poniższym rysunku.



Zestawienie wykresów