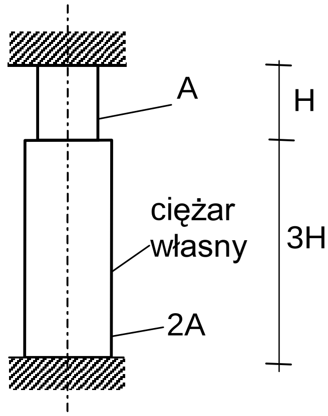
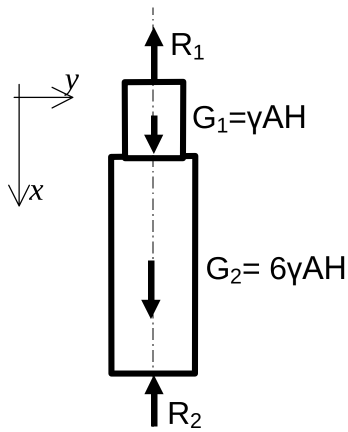
Przykład 1.2. Słup obustronnie utwierdzony obciążony ciężarem własnym

Wyznaczyć reakcje wywołane ciężarem własnym słupa. Narysować wykresy siły normalnej i naprężeń normalnych. Zaznaczyć na jakiej długości słup jest ściskany, a na jakiej rozciągany.



Rozwiązanie

W celu wyznaczenia reakcji uwalniamy słup od więzów wprowadzając właściwe im reakcje i ciężary obu odcinków słupa.



Przedstawiony na rysunku powyżej schemat równoważny jest zadaniu wyjściowemu tylko statycznie, ponieważ brak więzów pozwala na dowolne odkształcenie słupa. Obustronne podparcie słupa powoduje, że słup nie może się swobodnie odkształcać i mimo obciążenia jego całkowita długość nie ulega zmianie. Oznacza to, że aby przedstawiony schemat równoważny był zadaniu wyjściowemu statycznie i geometrycznie konieczne jest dołączenie do równania równowagi warunku geometrycznej zgodności. Warunek ten można zapisać w postaci $\Delta l=0$.

A zatem spełnione muszą być:

- warunki równowagi płaskiego układu sił: $\sum P_{ix} = 0 \qquad \sum P_{iy} = 0 \qquad \sum M_{io} = 0$ (1)
- warunek geometrycznej zgodności: $\Delta l=0$. (2)

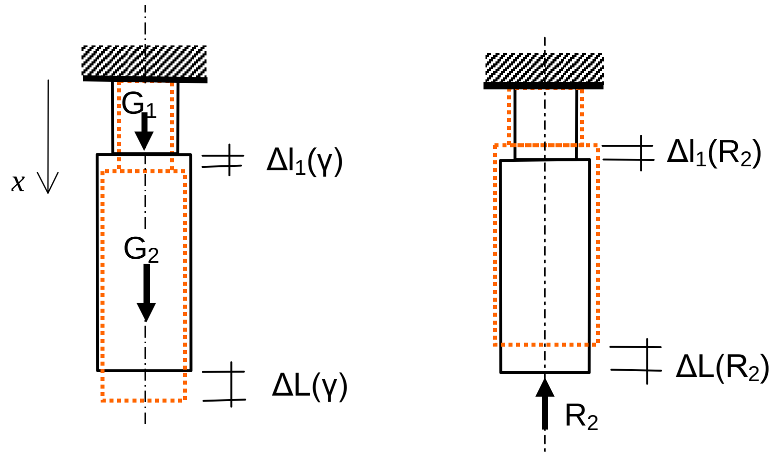
Jedyny nietożsamościowy warunek równowagi przyjmuje postać

$$-R_1 + G_1 + G_2 - R_2 = 0$$

co po uwzględnieniu ciężaru własnego daje

$$R_1 + R_2 = 7\gamma AH. \qquad (1^*)$$

W celu wykorzystania warunku (2) obliczymy całkowitą zmianę długości słupa wywołaną działającym obciążeniem. Wykorzystajmy do tego rozwiązanie poprzedniego zadania i następujące rozumowanie. Nasze zadanie może być przedstawione jako superpozycja dwóch poniższych zadań:



Swobodnie odkształcający się słup wydłuża się pod własnym ciężarem i wydłużenie to wynosi

$$\Delta L(\gamma) = \Delta l_1(\gamma) + \Delta l_2(\gamma) = = \frac{\gamma H^2}{2E} + \frac{G_2 H}{EA} + \frac{\gamma (3H)^2}{2E} = 11\frac{\gamma H^2}{E}$$

Reakcja R_2 powoduje zaś skrócenie słupa, które obliczone analogicznie wynosi

$$\Delta L(R_2) = \Delta l_1(R_2) + \Delta l_2(R_2) = -\frac{R_2 H}{EA} - \frac{R_2 3H}{E2A} = -\frac{5}{2}\frac{R_2 H}{EA}.$$

Warunek geometrycznej zgodności przyjmuje zatem postać

$$\Delta L = \Delta L(\gamma) + \Delta L(R_2) = 11\frac{\gamma H^2}{E} - \frac{5R_2 H}{2EA} = 0 \qquad (2^*)$$

Uzyskaliśmy układ równań (1*) i (2*) z dwiema niewiadomymi reakcjami R_1 i R_2.
Obliczona z równania (2*) reakcja R_2 wynosi

$$R_2 = \frac{22}{5}\gamma AH$$

a z równania (1*) reakcja R_1

$$R_1 = \frac{13}{5}\gamma AH.$$

Równania siły normalnej przyjmują postać:

w przedziale (0,H) $\quad N(x) = R_1 - \gamma Ax = \frac{13}{5}\gamma AH - \gamma Ax$

w przedziale (H, 4H) $\quad N(x) = -R_2 + \gamma 2A(4H - x) = \frac{18}{5}\gamma AH - 2\gamma Ax.$

Siła normalna opisana jest funkcją liniową, a więc wystarczy do zbudowania wykresu obliczyć jej wartości na krańcach przedziałów zmienności:

$$N(0) = \frac{13}{5}\gamma AH = 2{,}6\,\gamma AH$$

$$N(H) = \frac{8}{5}\gamma AH = 1{,}6\,\gamma AH$$

$$N(4H) = -\frac{22}{5}\gamma AH = -\ 4{,}4\,\gamma AH$$

W podstawie powstaje ściskanie siłą o wartości 4,4 γAH, a na wysokości 3H rozciąganie siłą o wartości 1,6 γAH. A zatem w części dolnej słupa siła normalna zmienia znak. Miejsce zerowe siły normalnej wyznaczone z proporcji (z uwagi na zmienność liniową) znajduje się w odległości 2,2H powyżej podstawy.

Równania naprężeń normalnych przyjmują postać:

w przedziale (0,H) $\sigma(x)=N(x)/A = \frac{13}{5}\gamma H - \gamma x$

w przedziale (H, 4H) $\sigma(x)=N(x)/2A =-\frac{9}{5}\gamma H - \gamma x.$

Zmienność naprężeń normalnych w obu przedziałach opisuje funkcja liniowa o tym samym współczynniku kierunkowym. Obliczymy rzędne charakterystyczne tego wykresu.

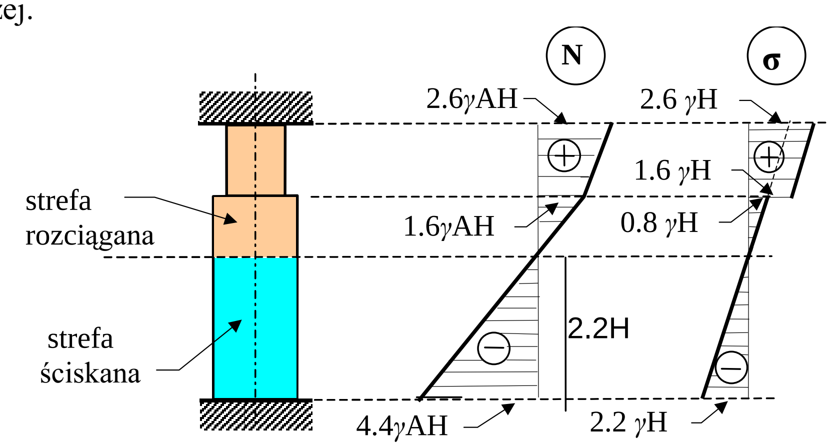
w przedziale (0,H) $\sigma(x=0) = N(0)/A = 2.6\ \gamma H$

$\sigma(x=H) = N(H)/A= 1.6\ \gamma H$

w przedziale (H, 4H) $\sigma(x=H)=N(H)/2A = 0.8\ \gamma H$

$\sigma(x=4H)=N(4H)/2A = - 2.2\ \gamma H$

Wykresy siły normalnej i naprężeń oraz ściskana i rozciągana część słupa przedstawione są na rysunku poniżej.



Uwaga
Zadanie można również rozwiązać przyjmując poniższy schemat, co polecamy jako ćwiczenie samodzielne.