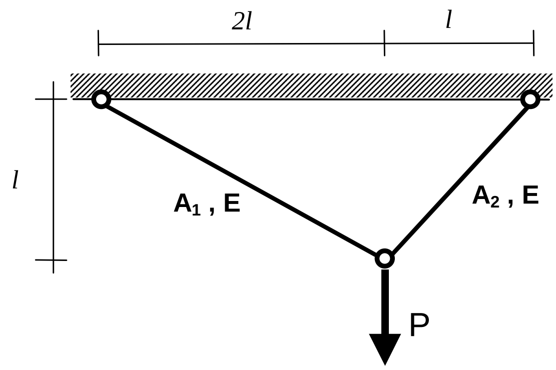
Przykład 1.4. Wyznaczanie przemieszczeń w układzie statycznie wyznaczalnym

Wyznaczyć przemieszczenie swobodnego węzła kratownicy. Przekroje prętów, ich długości oraz moduł Younga opisane są na rysunku. Do obliczeń przyjąć następujące zależności: $A_1=A$, $A_2=2A$, $E_1=E_2=E$.

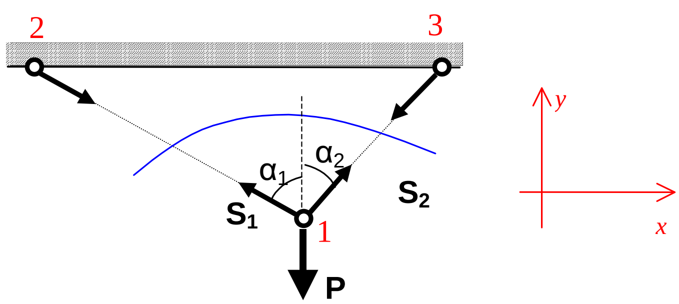
Obliczenia przeprowadzić dla następujących danych liczbowych:

$P = 1000N$,
$A = 0.0001\ m^2$,
$l = 1m$,
$E = 2.1\ 10^{11} Pa$.



Rozwiązanie

Wprowadzamy układ współrzędnych, oznaczenia sił w prętach i numery węzłów jak na rysunku poniżej.



Zauważmy, że jak w przykładzie poprzednim zadanie jest statycznie wyznaczalne. Można je, zatem rozwiązać w następujący sposób:

1. Z równań równowagi węzła 1 wyznaczamy siły wewnętrzne S_1 i S_2.
2. Z prawa Hoocke'a obliczamy wartości wydłużeń.
3. Z równań geometrycznych wyznaczamy składowe wektora przemieszczenia węzła 1.
4. Z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy długość wektora przemieszczenia węzła 1.

Długości prętów wynoszą: $l_1 = \sqrt{5}l$, $l_2 = \sqrt{2}l$.

Kąty α_1 i α_2 określone są następująco

$$\cos\alpha_1 = \frac{l}{l\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad , \qquad \sin\alpha_1 = \frac{2l}{l\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} ,$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \qquad \sin\alpha_2 = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Obliczmy siły w prętach z <u>równań równowagi</u> węzła swobodnego 1:

$$\sum P_{ix} = 0 \Rightarrow -S_1 \frac{2}{\sqrt{5}} + S_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sum P_{iy} = 0 \Rightarrow S_1 \frac{1}{\sqrt{5}} + S_2 \frac{1}{\sqrt{2}} - P = 0$$

Obliczone wartości wynoszą:

$$S_1 = \frac{\sqrt{5}}{3} P \quad ,$$

$$S_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} P \quad .$$

Wydłużenia prętów wywołane działającymi w nich siłami, czyli równania fizyczne mają postać:

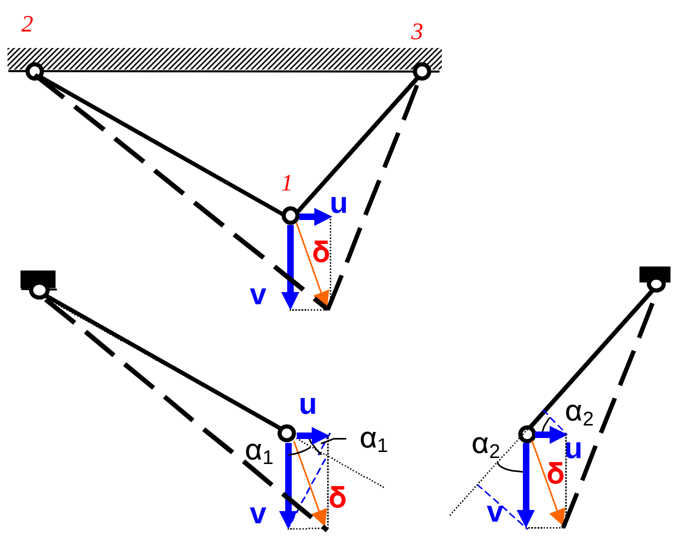
$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l_1}{E_1 A_1} \quad , \quad \Delta l_2 = \frac{S_2 l_2}{E_2 A_2} .$$

Wydłużenia prętów wynoszą:

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 \sqrt{5} l}{EA} = \frac{5}{3} \frac{Pl}{EA}$$

$$\Delta l_2 = \frac{S_2 \sqrt{2} l}{E2A} = \frac{2}{3} \frac{Pl}{EA} \quad .$$

W zadaniu tylko węzeł nr 1 jest swobodny (może się przemieszczać), zatem przemieszczenia całego układu opisane są przez przemieszczenie tego węzła δ (inaczej przez jego dwie niezależne składowe u i v). Założone kierunki i zwroty przedstawia poniższy rysunek. Linią przerywaną na rysunku zaznaczono pręty w układzie odkształconym.



Zapiszemy teraz równania geometryczne, czyli wydłużenia prętów wyrażone przez przemieszczenia jego końców.

Po uwzględnieniu, że wydłużenia prętów wynikają tylko z przemieszczenia węzła 1 równania geometryczne przyjmują postać

$$\Delta l_1 = v \cos\alpha_1 + u \sin\alpha_1$$

$$\Delta l_2 = v \cos\alpha_2 - u \sin\alpha_2$$

co po podstawieniu wartości funkcji trygonometrycznych kątów α_i sprowadza je do postaci:

$$\Delta l_1 = v\frac{1}{\sqrt{5}} + u\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Delta l_2 = v\frac{\sqrt{2}}{2} - u\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Poszukiwane składowe przemieszczenia węzła 1 określone są następująco:

$$u = \frac{\sqrt{5}}{3}\Delta l_1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\Delta l_2$$

$$v = \frac{\sqrt{5}}{3}\Delta l_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\Delta l_2 .$$

Po podstawieniu wydłużeń wyrazimy przemieszczenie pionowe i poziome węzła 1 przez wartość obciążenia i sztywności prętów:

$$u = \left(\frac{5\sqrt{5}}{9} - \frac{2\sqrt{2}}{9}\right)\frac{Pl}{EA} = 0.928\frac{Pl}{EA}$$

$$v = \left(\frac{5\sqrt{5}}{9} + \frac{4\sqrt{2}}{9}\right)\frac{Pl}{EA} = 1.871\frac{Pl}{EA}$$

Całkowite przemieszczenie $\delta = \sqrt{u^2 + v^2}$ wynosi

$$\delta = \sqrt{(0.928)^2 + (1.871)^2}\,\frac{Pl}{EA} = 2,088\frac{Pl}{EA} .$$

Podstawiając dane liczbowe uzyskujemy

$$u = 0.928\frac{1000N \cdot 1m}{2.1 \cdot 10^{11}\,\frac{N}{m^2} \cdot 0.0001m^2} = 4.4 \cdot 10^{-5}\,m$$

$$v = 1.871\frac{1000N \cdot 1m}{2.1 \cdot 10^{11}\,\frac{N}{m^2} \cdot 0.0001m^2} = 8.9 \cdot 10^{-5}\,m$$

i całkowite przemieszczenie $\delta = 9.9 \cdot 10^{-5}\,m \approx 0.1mm$.

Zadanie można rozwiązać bezpośrednio bez wykorzystywania statycznej wyznaczalności układu:

1. Z równań geometrycznych wyrażamy wydłużenia poprzez składowe wektora przemieszczenia węzła 1.
2. Z prawa Hoocke'a wyrażamy siły za pomocą wydłużeń, a podstawiając wyniki p.1 za pomocą składowych wektora przemieszczenia węzła 1.
3. Uzyskane w p.2 wyrażenia podstawiamy do warunków równowagi węzła 1 otrzymując układ dwu równań względem dwu składowych wektora przemieszczenia węzła 1.
4. Rozwiązując układ równań uzyskany w p.3 mamy rozwiązanie zadania.
5. Z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy długość wektora przemieszczenia węzła 1.