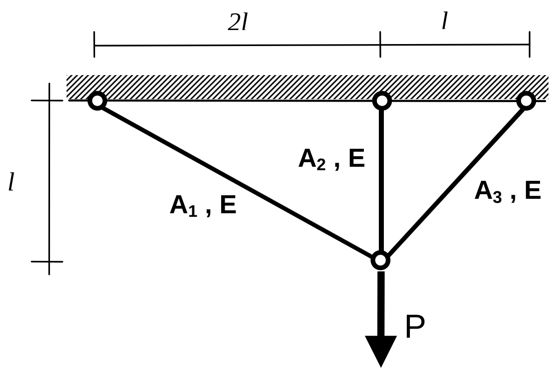
Przykład 1.5. Wyznaczanie sił i przemieszczeń w układzie statycznie niewyznaczalnym

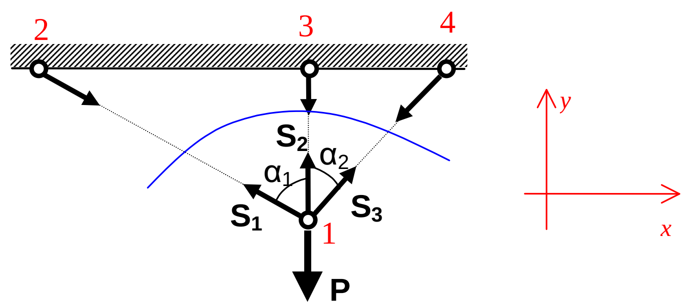
Wyznaczyć siły w prętach kratownicy. Przekroje prętów, ich długości oraz moduł Younga opisane są na rysunku. Do obliczeń przyjąć następujące zależności:
$A_1=A_2=A$, $A_3=2A$, $E_1=E_2=E_3=E$.
Obliczyć przemieszczenie swobodnego węzła dla następujących danych liczbowych:

$P = 1000N$, $A = 0.0001\ m^2$, $l=1m$, $E = 2.1\ 10^{11}Pa$



Rozwiązanie

Zadanie jest statycznie niewyznaczalne. Wprowadzamy układ współrzędnych, oznaczenia sił w prętach i numery węzłów jak na rysunku poniżej.



Długości prętów wynoszą: $l_1 = \sqrt{5}l$, $l_2 = l$, $l_3 = \sqrt{2}l$.

Kąty α_1 i α_2 określone są następująco

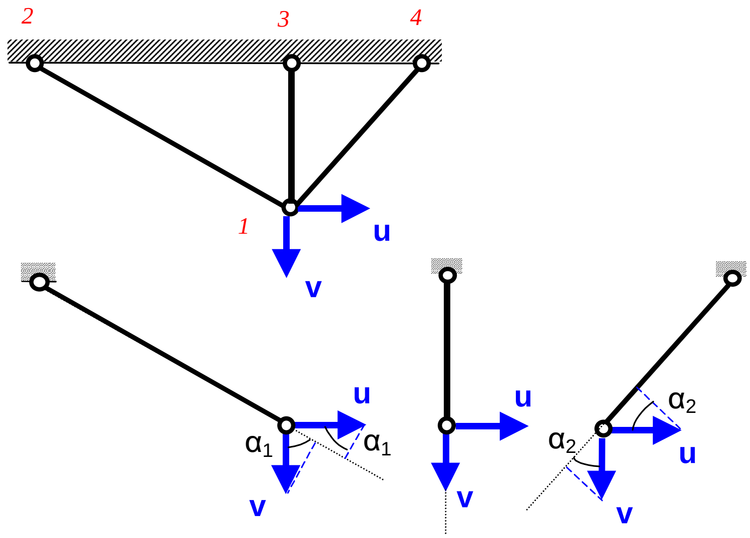
$$\cos\alpha_1 = \frac{l}{l\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad , \quad \sin\alpha_1 = \frac{2l}{l\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\alpha_2 = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Rozwiązanie zadania metodą przemieszczeń przebiegać będzie wg następującego schematu:

1. Wyrażamy wydłużenia poprzez składowe wektora przemieszczenia węzła 1 korzystając z równań geometrycznych.
2. Siły wyrażamy za pomocą wydłużeń korzystając z prawa Hoocke'a i dalej - podstawiając wyniki p.1 - za pomocą składowych wektora przemieszczenia węzła 1.
3. Uzyskane w p.2 wyrażenia podstawiamy do warunków równowagi węzła 1 otrzymując układ dwu równań względem dwu składowych wektora przemieszczenia węzła 1.
4. Rozwiązując układ równań uzyskany w p.3 znajdujemy składowe wektora przemieszczenia węzła 1 i dalej – korzystając z zależności z p.2 – poszukiwane siły w prętach.

W zadaniu tylko węzeł nr 1 jest swobodny (może się przemieszczać), zatem przemieszczenia całego układu opisane są tylko przez dwie składowe nieznanego przemieszczenia tego węzła: u i v (kierunki i zwroty przedstawia rysunek).



Zapiszemy teraz <u>równania geometryczne</u> czyli wydłużenia prętów wyrażone przez przemieszczenia końców.
Po uwzględnieniu, że wydłużenia prętów zależą tylko od przemieszczeń u i v węzła 1 równania geometryczne przyjmują postać

$$\Delta l_3 = v\cos\alpha_1 + u\sin\alpha_1$$
$$\Delta l_2 = v$$
$$\Delta l_3 = v\cos\alpha_2 - u\sin\alpha_2$$

co po podstawieniu wartości kątów α_i uprasza je następująco:

$$\begin{aligned}\Delta l_1 &= v\frac{1}{\sqrt{5}} + u\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \Delta l_2 &= v\\ \Delta l_3 &= v\frac{\sqrt{2}}{2} - u\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned} \qquad (1,2,3)$$

Wykorzystamy teraz zależności między wydłużeniami prętów a działającymi w nich siłami czyli <u>równania fizyczne.</u>

Wydłużenia prętów wynoszą:

$$\begin{aligned}\Delta l_1 &= \frac{S_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{S_1\sqrt{5}l}{EA}\\ \Delta l_2 &= \frac{S_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{S_2 l}{EA}\\ \Delta l_3 &= \frac{S_3 l_3}{E_3 A_3} = \frac{S_3\sqrt{2}l}{E2A}\end{aligned} \qquad (4,5,6)$$

Wyznaczając siły uzyskujemy zależności:

$$S_1 = \frac{EA}{\sqrt{5}l}\Delta l_1 \quad , \quad S_2 = \frac{EA}{l}\Delta l_2 \quad , \quad S_3 = \frac{2EA}{\sqrt{2}l}\Delta l_3 \quad ,$$

które po uwzględnieniu zależności (1,2,3) przyjmują postać:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \frac{EA}{\sqrt{5}l}\Delta l_1 = \frac{EA}{\sqrt{5}l}\left(v\frac{1}{\sqrt{5}} + u\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{EA}{5l}(v+2u)\\
S_2 &= \frac{EA}{\sqrt{5}l}\Delta l_2 = \frac{EA}{l}v \qquad\qquad (4^*,5^*,6^*)\\
S_3 &= \frac{2EA}{\sqrt{2}l}\Delta l_3 = \frac{2EA}{\sqrt{2}l}\left(v\frac{\sqrt{2}}{2} - u\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{EA}{l}(v-u).
\end{aligned}
$$

Dla węzła swobodnego 1 zapisujemy teraz <u>równania równowagi</u>:

$$
\begin{aligned}
&\sum P_{ix} = 0 \Rightarrow -S_1\frac{2}{\sqrt{5}} + S_3\frac{1}{\sqrt{2}} = 0\\
&\sum P_{iy} = 0 \Rightarrow S_1\frac{1}{\sqrt{5}} + S_2 + S_3\frac{1}{\sqrt{2}} - P = 0
\end{aligned}
\qquad (7,8)
$$

Podstawiając do równań (7,8) zależności ($4^*,5^*,6^*$) uzyskamy układ 2 równań z niewiadomymi u i v:

$$
\begin{cases}
-\dfrac{EA}{5l}(v+2u)\dfrac{2}{\sqrt{5}} + \dfrac{EA}{l}(v-u)\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0\\[2ex]
\dfrac{EA}{5l}(v+2u)\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{EA}{l}v + \dfrac{EA}{l}(v-u)\dfrac{1}{\sqrt{2}} - P = 0
\end{cases}
$$

który po uporządkowaniu ma postać

$$
\begin{cases}
v\left(-\dfrac{2}{5\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - u\left(\dfrac{4}{5\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0\\[2ex]
v\left(\dfrac{1}{5\sqrt{5}} + 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + u\left(\dfrac{2}{5\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{EA}P
\end{cases}
$$

Rozwiązując (np. z wykorzystaniem programu MAPLE) ten układ otrzymamy poszukiwane (dokładne) wartości składowych przemieszczeń:

$$
u = \frac{135\sqrt{5} - 119 + 100\sqrt{5}\sqrt{2} - 288\sqrt{2}}{284}\cdot\frac{Pl}{EA}
$$

$$
v = \frac{15\sqrt{5} + 113 + 90\sqrt{5}\sqrt{2} - 174\sqrt{2}}{284}\cdot\frac{Pl}{EA}
$$

W przybliżeniu dziesiętnym wynoszą one

$$
u = 0{,}32325\frac{Pl}{EA}\quad,\qquad v = 0{,}65166\frac{Pl}{EA}
$$

Obliczone teraz z równań ($4^*,5^*,6^*$) siły w prętach wynoszą:

S_1=0,2596 P , S_2= 0,6517 P , S_3= 0,3284 P.

Podstawiając dane liczbowe obliczmy wartości składowych przemieszczeń

$$
u = 0{,}32325\frac{Pl}{EA} = \frac{0{,}32325\cdot 1000N\cdot 1m}{2.1\cdot 10^{11}\dfrac{N}{m^2}\cdot 0.0001m^2} = 1{,}54\cdot 10^{-5}\,m
$$

$$
v = 0{,}65166\frac{Pl}{EA} = \frac{0.65166\cdot 1000N\cdot 1m}{2.1\cdot 10^{11}\dfrac{N}{m^2}\cdot 0.0001m^2} = 3.10\cdot 10^{-5}\,m
$$

Porównując te wielkości przemieszczeń z wielkościami z poprzedniego zadania, zauważamy, że usztywnienie układu jednym dodatkowym prętem spowodowało prawie trzykrotne zmniejszenie przemieszczeń.