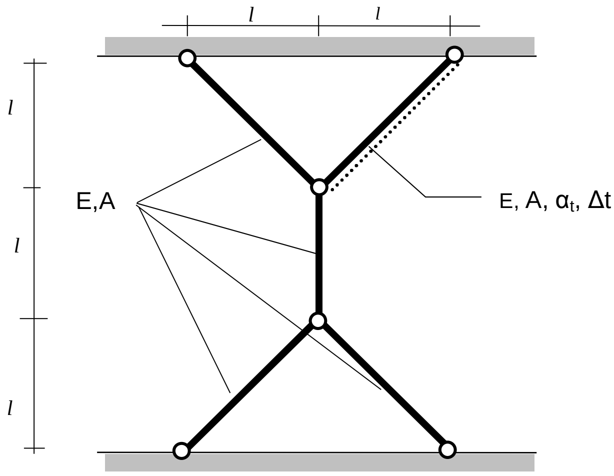
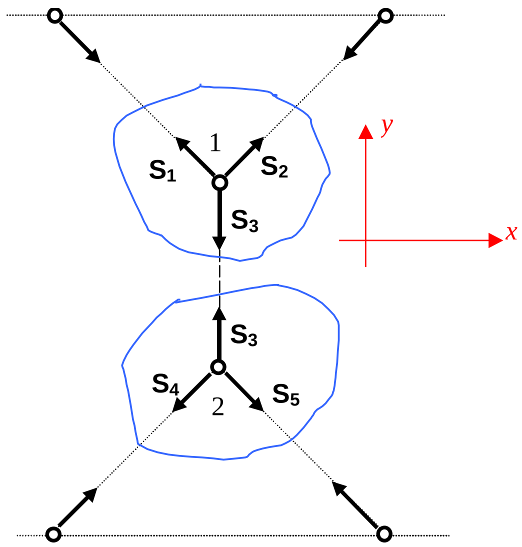
Przykład 1.6. Obciążenie termiczne

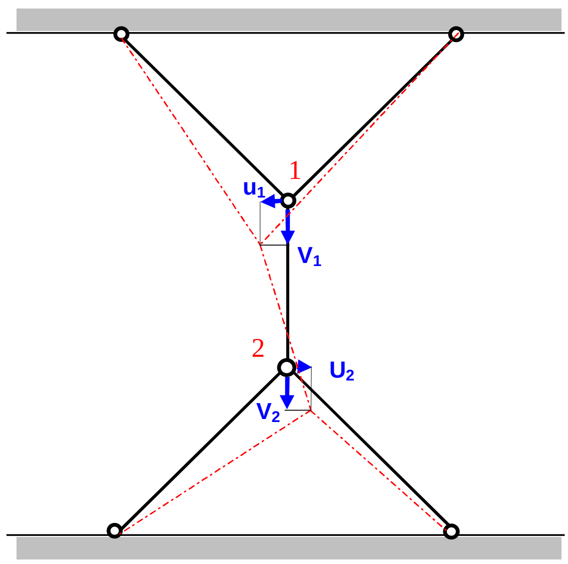
Wyznaczyć siły w prętach przedstawionego układu prętowego wywołane obciążeniem termicznym Δt [˚C] jednego pręta. Przekroje poprzeczne prętów są jednakowe i wynoszą A [m^2], długości *l* w [m], ich moduł Younga - E [N/m^2] i współczynnik rozszerzalności liniowej α_t [1/˚C],



Rozwiązanie

Obciążenie termiczne $\Delta t > 0$ pręta wywołuje jego wydłużenie. Ponieważ jednak swoboda jego odkształcania jest ograniczona, więc powstaje stan wstępnych naprężeń wywołany niemożnością swobodnego odkształcenia ogrzanego pręta i odkształceniami pozostałych prętów układu.
Wprowadźmy oznaczenia sił w prętach i opiszmy przemieszczenia dwu swobodnych węzłów 1 i 2 składowymi wektorów ich przemieszczeń, odpowiednio u_1, v_1 i u_2, v_2.





Równania geometryczne.

Równania geometryczne przyjmują postać

$$\Delta l_1 = -u_1 \cos 45^o + v_1 \cos 45^o$$

$$\Delta l_2 = u_1 \cos 45^o + v_1 \cos 45^o$$

$$\Delta l_3 = -v_1 + v_2$$

$$\Delta l_4 = u_2 \cos 45^o - v_2 \cos 45^o \qquad (1\text{-}5)$$

$$\Delta l_5 = -u_2 \cos 45^o - v_2 \cos 45^o$$

Warunki fizyczne

Wydłużenia prętów wynoszą:

$$\Delta l_1 = \frac{S_1\sqrt{2}l}{EA}, \qquad \Delta l_2 = \frac{S_2\sqrt{2}l}{EA} + \sqrt{2}\alpha_t \Delta tl, \qquad \Delta l_3 = \frac{S_3 l}{EA},$$

$$\Delta l_4 = \frac{S_4\sqrt{2}l}{EA}, \qquad \Delta l_5 = \frac{S_5\sqrt{2}l}{EA} \qquad (6\text{-}10)$$

Wyznaczając siły z równań (6-10) i uwzględniając równania (1-4) otrzymujemy

$$S_1 = \frac{EA}{2l}(-u_1 + v_1)$$

$$S_2 = \frac{EA}{2l}(u_1 + v_1 - 2\alpha_t \Delta tl)$$

$$S_3 = \frac{EA}{l}(-v_1 + v_2) \qquad (6^*\text{-}10^*)$$

$$S_4 = \frac{EA}{2l}(u_2 - v_2)$$

$$S_5 = \frac{EA}{2l}(-u_2 - v_2)$$

Zapiszemy teraz równania równowagi dla węzłów swobodnych 1 i 2.

Węzeł 1

$$\sum P_{ix} = 0 \Rightarrow -S_1\frac{1}{\sqrt{2}} + S_2\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$(11,12)$$

$$\sum P_{iy} = 0 \Rightarrow S_1\frac{1}{\sqrt{2}} + S_2\frac{1}{\sqrt{2}} - S_3 = 0$$

Węzeł 2

$$\sum P_{ix} = 0 \Rightarrow -S_4\frac{1}{\sqrt{2}} + S_5\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$(13,14)$$

$$\sum P_{iy} = 0 \Rightarrow -S_4\frac{1}{\sqrt{2}} - S_5\frac{1}{\sqrt{2}} + S_3 = 0$$

Podstawiając wyrażenia (6*-10*) do równań (11-14) mamy układ 4 równań:

$$\begin{cases} -\frac{EA}{2l}(-u_1 + v_1) + \frac{EA}{2l}(u_1 + v_1 - 2\alpha_t \Delta tl) = 0 \\ \frac{EA}{2l}(-u_1 + v_1) + \frac{EA}{2l}(u_1 + v_1 - 2\alpha_t \Delta tl) - \sqrt{2}\frac{EA}{l}(-v_1 + v_2) = 0 \\ -\frac{EA}{2l}(u_2 - v_2) + \frac{EA}{2l}(-u_2 - v_2) = 0 \\ -\frac{EA}{2l}(u_2 - v_2) - \frac{EA}{2l}(-u_2 - v_2) + \sqrt{2}\frac{EA}{l}(-v_1 + v_2) = 0 \end{cases}$$

który po uporządkowaniu ma postać:

$$\begin{cases} u_1 - \alpha_t \Delta t l = 0 \\ \left(2 + 2\sqrt{2}\right) v_1 - 2 v_2 = \sqrt{2} \alpha_t \Delta t l \\ u_2 = 0 \\ 2 v_1 - \left(2 + \sqrt{2}\right) v_2 = 0 \end{cases}$$

Z rozwiązania układu otrzymujemy

$$u_1 = \alpha_t \Delta t l,$$

$$u_2 = 0,$$

$$v_1 = \frac{3 + \sqrt{2}}{7} \alpha_t \Delta t l,$$

$$v_2 = \frac{4 - \sqrt{2}}{7} \alpha_t \Delta t l.$$

Z równań (6*-10*) wyznaczamy siły w prętach

$$S_1 = S_2 = S_4 = S_5 = -\frac{1}{14}\left(4 - \sqrt{2}\right) E A \alpha_t \Delta t = -0.1847 \cdot E A \alpha_t \Delta t,$$

$$S_3 = -\frac{1}{7}\left(2\sqrt{2} - 1\right) E A \alpha_t \Delta t = -0.2612 \cdot E A \alpha_t \Delta t.$$

Wszystkie pręty są ściskane.

Ćwiczenie

Wykorzystując przedstawione rozwiązanie wyznacz siły w prętach tego układu, przy założeniu, że pręt nr 2 jest nieodkształcalny (np. wykonany jest z materiału o dużo większym module Younga, niż pozostałe pręty). Porównaj rozwiązania.