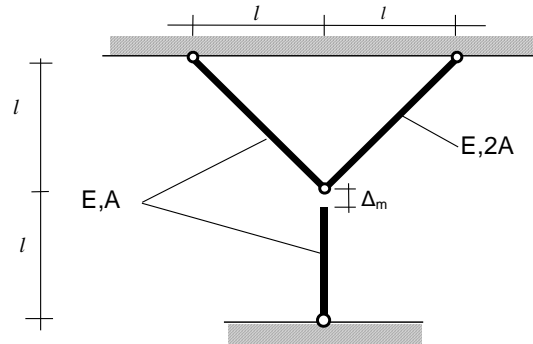


Przykład 1.7. Obciążenie montażowe

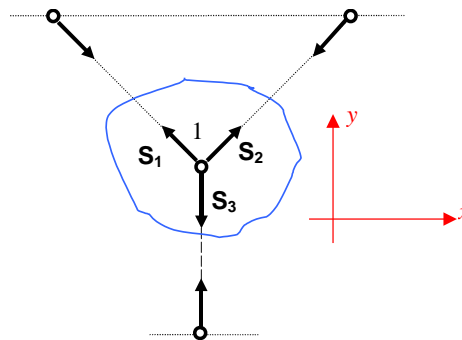
Wyznaczyć siły w prętach przedstawionego układu prętowego wywołane wymuszonym montażem spowodowanym błędną długością jednego pręta – mniejszą od wymaganej o Δ_m . Przekroje poprzeczne prętów oraz moduł Younga jak na rysunku. Wyznaczyć położenie węzła po połączeniu prętów.



Rozwiązanie

Zadanie rozwiążemy metodą przemieszczeń wyrażając wszystkie niewiadome za pomocą przemieszczeń.

Wymuszony montaż oznacza, że mimo niedokładności wykonania prętów (układ przedstawiony na rysunku) zostaną one połączone w jednym węźle. Wymaga to wstępnego odkształcenia pręta i wywoła w całym układzie wstępny stan naprężenia tzw. naprężenia montażowe. Wprowadzając oznaczenia sił w prętach zapiszemy równania równowagi dla węzła swobodnego 1.



Węzeł 1

$$\sum P_{ix} = 0 \Rightarrow -S_1 \frac{1}{\sqrt{2}} + S_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad (1,2)$$

$$\sum P_{iy} = 0 \Rightarrow S_1 \frac{1}{\sqrt{2}} + S_2 \frac{1}{\sqrt{2}} - S_3 = 0$$

Uzyskaliśmy układ 2 równań jednorodnych z 3 niewiadomymi. Brakujące równanie uzyskamy z analizy warunków geometrycznych i fizycznych zadania.

Warunki fizyczne

Wydłużenia prętów wynoszą:

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l_1}{E_1 A_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{S_2 l_2}{E_2 A_2}, \quad \Delta l_3 = \frac{S_3 l_3}{E_3 A_3}. \quad (3,4,5)$$

Po uwzględnieniu danych mamy

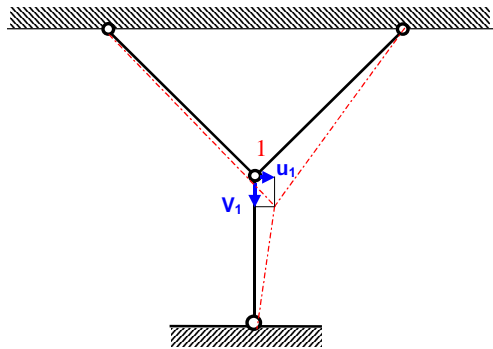
$$\Delta l_1 = \frac{S_1 \sqrt{2} l}{EA}, \quad \Delta l_2 = \frac{S_2 \sqrt{2} l}{E2A}, \quad \Delta l_3 = \frac{S_3 l}{EA}.$$

Stąd łatwo wyznaczamy siły w prętach za pośrednictwem wydłużeń

$$S_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{EA}{l} \Delta l_1, \quad S_2 = \sqrt{2} \frac{EA}{l} \Delta l_2, \quad S_3 = \frac{EA}{l} \Delta l_3. \quad (3^*, 4^*, 5^*)$$

Zapiszemy teraz równania geometryczne czyli wydłużenia prętów wyrażone przez przemieszczenia węzłów.

Przemieszczenie węzła 1 opiszemy składowymi u_1, v_1 wektora jego przemieszczenia. Opisują one położenie węzła 1 po połączeniu prętów



Równania geometryczne przyjmują postać

$$\Delta l_1 = \frac{u_1}{\sqrt{2}} + \frac{v_1}{\sqrt{2}}, \quad \Delta l_2 = -\frac{u_1}{\sqrt{2}} + \frac{v_1}{\sqrt{2}}, \quad \Delta l_3 = \Delta_m - v_1. \quad (6, 7, 8)$$

W równaniu (8) uwzględnione zostało wstępne wydłużenie pręta 3 do węzła 1 o wielkość błędu montażowego. Podstawiając otrzymane wyrażenia do (3*-5*) otrzymujemy siły wyrażone przez przemieszczenia

$$S_1 = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} (u_1 + v_1), \quad S_2 = -\frac{EA}{l} (u_1 - v_1), \quad S_3 = \frac{EA}{l} (\Delta_m - v_1),$$

a po podstawieniu ich do równań równowagi dostajemy układ dwu równań względem dwu niewiadomych przemieszczeń

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \frac{EA}{l} u_1 - \frac{1}{2} \frac{EA}{l} v_1 = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{EA}{l} u_1 + -\left(\frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{EA}{l} + \frac{EA}{l}\right) v_1 - \frac{EA}{l} \Delta_m = 0 \end{cases}$$

Z rozwiązania powyższego układu dostajemy

$$v_1 = \frac{3}{3 + 2\sqrt{2}} \Delta_m \cong 0.52 \Delta_m$$

$$u_1 = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} \Delta_m \cong 0.17 \Delta_m$$

Węzeł przemieszcza się w założonym kierunku. Przesunięcie w poziomie wynika z różnych sztywności prętów 1 i 2. Jako ćwiczenie polecamy rozwiązanie tego zadania w przypadku jednakowych przekrojów prętów.