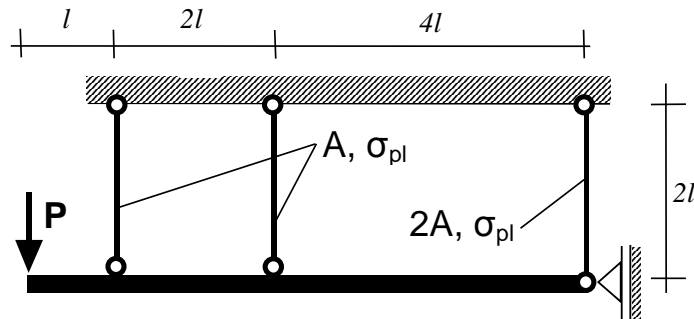


Przykład 1.8. Wyznaczanie obciążenia granicznego dla układu prętowego metodą kinematyczną i statyczną

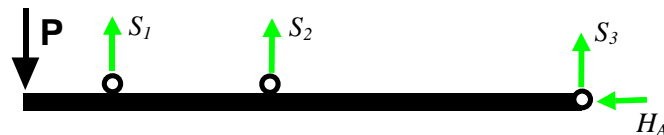
Analizując równowagę układu w stanie granicznym wyznaczyć obciążenie graniczne dla zadanych wartości przekrojów prętów A [m^2] i naprężeń plastycznych σ_{pl} [N/m^2].



Rozwiązanie

- *Rozwiązanie metodą kinematyczną*

Otrzymany po uwolnieniu od więzów układ sił przedstawia poniższy rysunek



Możemy obliczyć stopień statycznej niewyznaczalności układu

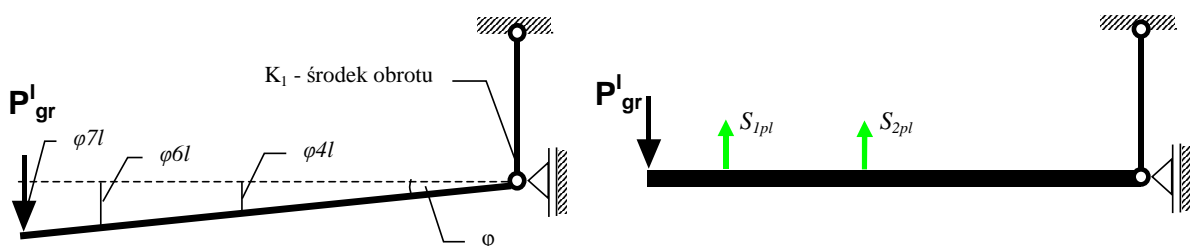
$$n = 4 \text{ (niewiadome)} - 3 \text{ (równania równowagi)} = 1.$$

Układ ten przejdzie w mechanizm po uplastycznieniu $n+1=2$ prętów podpierających belkę. Możliwe są następujące przypadki układów zmiennych geometrycznie, w których siły w prętach uplastycznionych odpowiadają ich nośności i wynoszą

$$S_{1pl} = A\sigma_{pl}, S_{2pl} = A\sigma_{pl}, S_{3pl} = 2A\sigma_{pl}.$$

Przyjęto, że naprężenia plastyczne przy rozciąganiu i ściskaniu są takie same.

I mechanizm zniszczenia – uplastyczniają się pręty nr 1 i 2



Na rysunku powyżej przedstawiony jest możliwy wirtualny obrót belki wywołany siłą P i wynikające z niego przemieszczenia punktów zaczepienia sił. Siły w prętach uplastycznionych mają zwroty przeciwne do kierunku przemieszczeń punktów ich zaczepienia.

Zasada pracy wirtualnej dla tego przypadku przyjmuje postać

$$P^I_{gr} \varphi 7l - S_{1pl} \varphi 6l - S_{2pl} \varphi 4l = 0$$

co po uwzględnieniu wartości sił plastycznych dla poszczególnych prętów daje

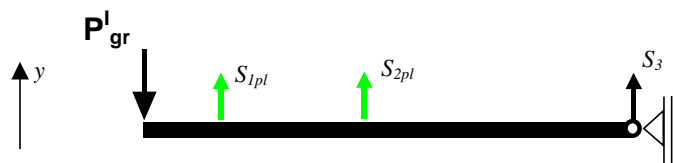
$$\varphi l (7P^I_{gr} - 6A\sigma_{pl} - 4A\sigma_{pl}) = 0.$$

Rozwiązanie tego równania (przy założeniu, że $\varphi \neq 0$ równoznacznym z powstaniem mechanizmu) prowadzi do warunku

$$P_{gr}^I = 10/7 A\sigma_{pl} = 1.43 A\sigma_{pl}.$$

Jeśli jednocześnie spełniony jest naprężeniowy warunek plastyczności $\sigma_3 \leq \sigma_{3pl}$, to oznacza, że obciążenie graniczne dla tego schematu stanowi poszukiwaną wartość graniczną i jest to schemat zniszczenia układu.

Z warunku równowagi możemy obliczyć wartość siły S_3 , a następnie wartość naprężeń w trzecim przęcie, a zatem możemy sprawdzić czy założonemu schematowi zniszczenia odpowiada statycznie dopuszczalny stan naprężenia spełniający naprężeniowy warunek plastyczności.



Z warunku sumy rzutów sił na oś pionową dostajemy równanie:

$$S_{1pl} + S_{2pl} + S_3 - P_{gr}^I = 0.$$

Stąd po podstawieniu obliczonej wartości obciążenia mamy

$$S_3 = -4/7 A\sigma_{pl}.$$

Zatem naprężenia w tym przęcie są ściskające i ich moduł wynosi

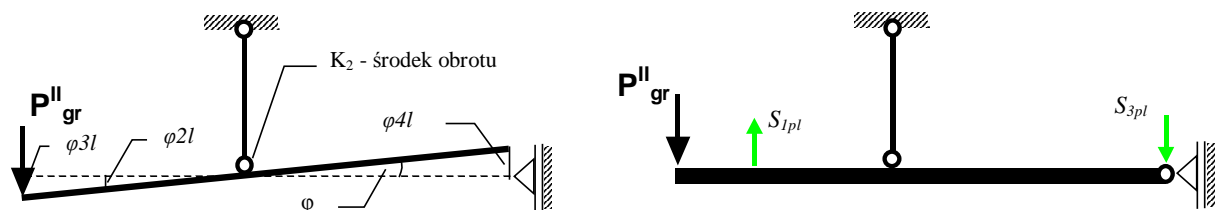
$$|\sigma_3| = \left| \frac{S_3}{2A} \right| = \frac{2}{7} \sigma_{pl} \leq \sigma_{pl}$$

czyli warunek plastyczności jest spełniony. Wnioskujemy, że założony schemat zniszczenia układu jest prawidłowy, a wartość obciążenia granicznego wynosi

$$P_{gr}^I = \frac{10}{7} A\sigma_{pl}$$

Dla porównania rozpatrzmy jeszcze inne schematy zniszczenia.

II mechanizm zniszczenia – uplastyczniają się pręty nr 1 i 3



Przy uplastycznieniu prętów 1 i 3 możliwy jest przedstawiony powyżej obrót belki względem chwilowego środka obrotu K_2 . Pręt nr 3 zostaje ściśnięty, a zatem wyczerpanie jego nośności nastąpiło ze względu na siłę ściskającą.

Zasada pracy wirtualnej dla tego przypadku przyjmuje postać

$$P_{gr}^{II} \varphi_{3l} - S_{1pl} \varphi_{2l} - S_{3pl} \varphi_{4l} = 0$$

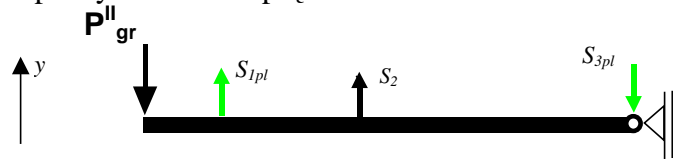
co po uwzględnieniu wartości sił plastycznych dla poszczególnych prętów daje równanie

$$\varphi l (3P_{gr}^{II} - 2A\sigma_{pl} - 8A\sigma_{pl}) = 0$$

i wartość obciążenia granicznego

$$P_{gr}^{II} = 10/3 A \sigma_{pl} = 3.33 A \sigma_{pl}$$

Sprawdzamy warunek plastyczności dla pręta 2



Z warunku sumy rzutów sił na oś pionową dostajemy równanie:

$$S_{1pl} + S_2 - S_{3pl} - P_{gr}^{II} = 0.$$

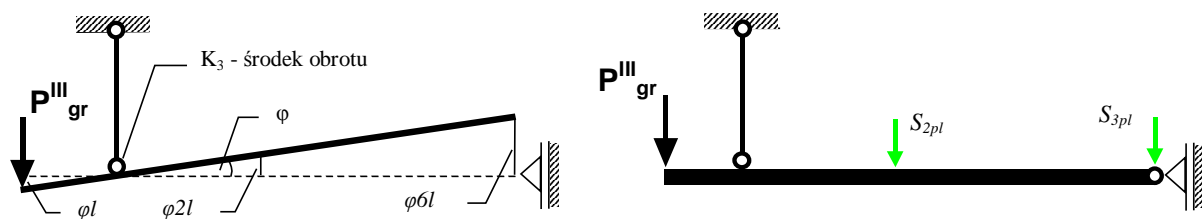
skąd obliczymy, że $S_2 = 13/3 A \sigma_{pl}$.

Wynika stąd następująca wartość naprężeń w drugim przęcie

$$\sigma_2 = \frac{S_2}{A} = \frac{13}{3} \sigma_{pl} > \sigma_{pl}$$

a zatem rozpatrywany schemat zniszczenia jest nieprawidłowy.

III mechanizm zniszczenia – uplastyczniają się pręty nr 2 i 3



Przy uplastycznieniu prętów 2 i 3 możliwy wirtualny obrót belki wywołuje ich ścisnienie, stąd przyjęte zwroty sił S_{2pl} i S_{3pl} .

Równanie pracy wirtualnej dla tego przypadku przyjmuje postać

$$P_{gr}^{III} \varphi_1 - S_{2pl} \varphi_{2l} - S_{3pl} \varphi_{6l} = 0,$$

co po uwzględnieniu wartości sił plastycznych dla poszczególnych prętów daje równanie

$$\varphi_1 (P_{gr}^{III} - 2A \sigma_{pl} - 12A \sigma_{pl}) = 0$$

i wartość obciążenia granicznego $P_{gr}^{III} = 14A \sigma_{pl}$.

Analogicznie jak w poprzednich schematach, po uwzględnieniu wartości P_{gr}^{III} z warunku sumy rzutów sił na oś pionową dostajemy:

$$S_1 = 17A \sigma_{pl}$$

Wynika stąd następująca wartość naprężeń w pierwszym przęcie

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{A} = 17 \sigma_{pl} > \sigma_{pl},$$

a zatem rozpatrywany schemat zniszczenia jest nieprawidłowy.

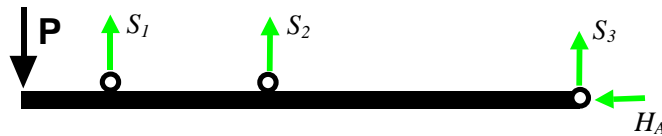
Każda z obliczonych wartości P_{gr}^I , P_{gr}^{II} , P_{gr}^{III} odpowiada innemu możliwemu mechanizmowi zniszczenia. W metodzie kinematycznej wartość graniczną stanowi najmniejsza z wielkości odpowiadających wszystkim możliwym (kinemtycznie dopuszczalnym) schematom zniszczenia. Określa ona tym samym sposób zniszczenia układu.

Zgodnie z powyższym stwierdzamy, że rozważany układ niszczy się wg schematu I i następuje to przy obciążeniu

$$P_{gr} = \min(P_{gr}^I, P_{gr}^{II}, P_{gr}^{III}) = P_{gr}^I = 1.43A \sigma_{pl}.$$

- *Rozwiązanie metodą statyczną*

W metodzie statycznej wykorzystamy warunki równowagi i warunki wytrzymałości dla prętów.



Powyższy układ sił musi spełniać równania równowagi

$$\Sigma P_{ix} = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\Sigma P_{iy} = 0 \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 - P = 0$$

$$\Sigma M_{iA} = 0 \Rightarrow P \cdot 7l - S_1 \cdot 6l - S_2 \cdot 4l = 0$$

oraz warunki graniczne dla sił w prętach

$$|S_1| \leq S_{1pl} \quad \text{czyli} \quad -A\sigma_{pl} \leq S_1 \leq A\sigma_{pl}$$

$$|S_2| \leq S_{2pl} \quad \text{czyli} \quad -A\sigma_{pl} \leq S_2 \leq A\sigma_{pl}$$

$$|S_3| \leq S_{3pl} \quad \text{czyli} \quad -2A\sigma_{pl} \leq S_3 \leq 2A\sigma_{pl}$$

Wykorzystując zależności uzyskane z równań równowagi

$$S_2 = 7/4 P - 3/2 S_1$$

$$S_3 = P - S_1 - S_2 = -3/4 P + 1/2 S_1$$

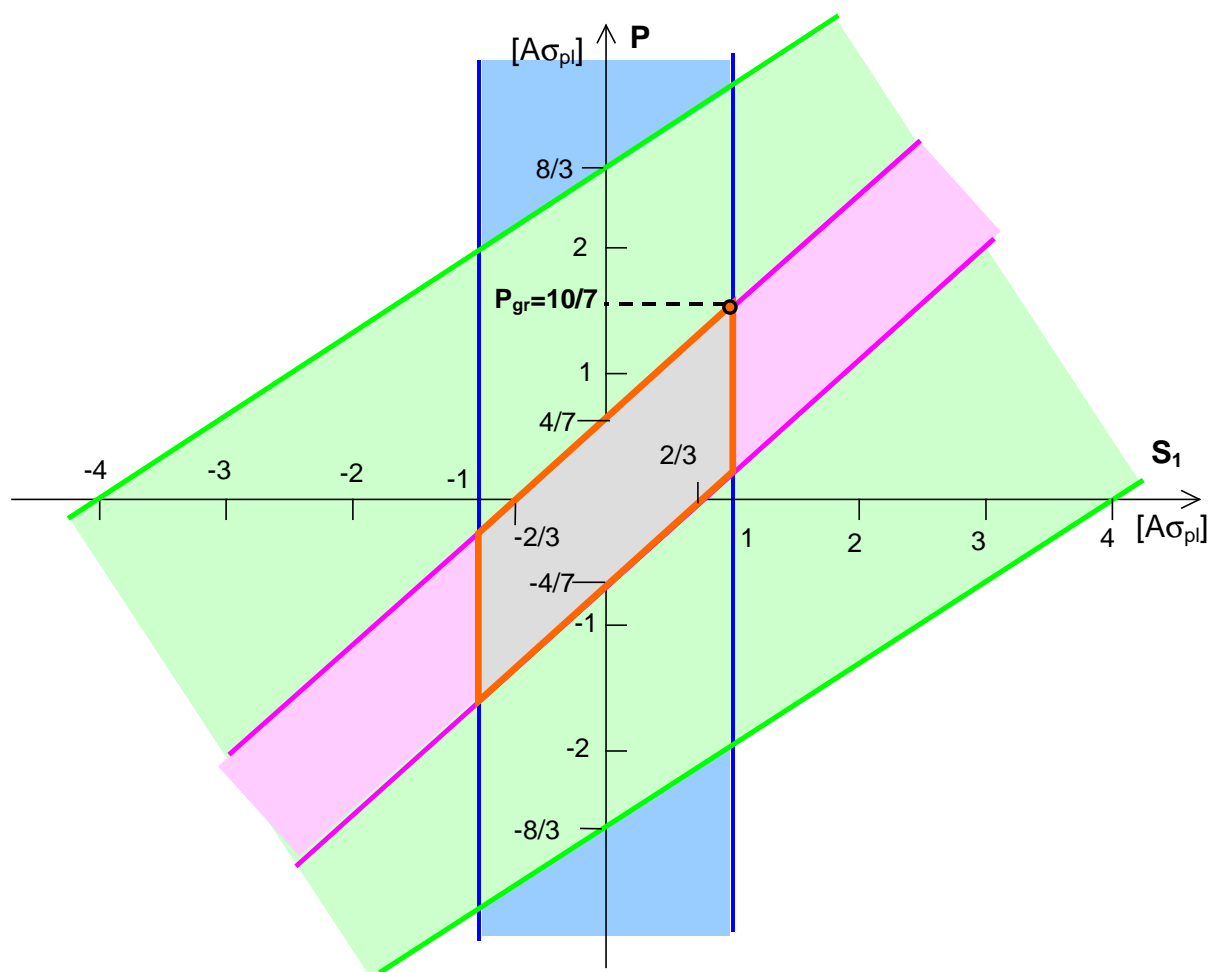
uzyskujemy układ 6 nierówności:

$$-A\sigma_{pl} \leq S_1 \leq A\sigma_{pl} \tag{1,2}$$

$$-A\sigma_{pl} \leq \frac{7}{4} P - \frac{3}{2} S_1 \leq A\sigma_{pl} \tag{3,4}$$

$$-2A\sigma_{pl} \leq \frac{1}{2} S_1 - \frac{3}{4} P \leq 2A\sigma_{pl} \tag{5,6}$$

Przedstawimy rozwiązanie graficzne znajdując obszar wspólny tych nierówności w układzie osi \$(S_1, P)\$. Kolorem niebieskim zaznaczone jest rozwiązanie pierwszej podwójnej nierówności, różowym – drugiej i zielonym trzeciej. Obszar wspólny obwiedziony jest czerwoną linią. Punkty o współrzędnych \$(S_1, P)\$ z tego obszaru spełniają wszystkie warunki zadania. Zakładając oczywiście, że interesujące jest jedynie rozwiązanie \$P > 0\$ znajdujemy najwyżej położony punkt tego obszaru. Jego współrzędna \$P\$ określa wartość obciążenia granicznego dla całego układu. Można odczytać ją z wykresu lub obliczyć jako punkt przecięcia prostych o równaniach \$S_1 = A\sigma_{pl}\$ i \$S_1 = 7/6 P_{gr} - 2/3 A\sigma_{pl}\$. Jest to wartość \$P_{gr} = 10/7 A\sigma_{pl}\$ – identyczna z rozwiązaniem metodą kinematyczną.



W metodzie statycznej analizujemy równowagę układu, stąd poszukujemy największej wartości obciążenia, które ją jeszcze zapewnia. Natomiast w metodzie kinematycznej analizujemy układ już po wyczerpaniu jego nośności, dlatego istotna jest najmniejsza wartość obciążenia, która wywołuje zmienność geometryczną układu.