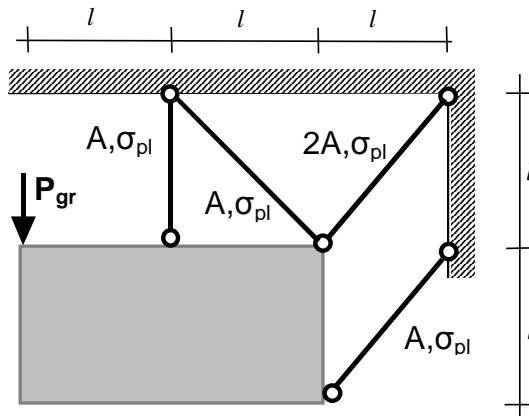


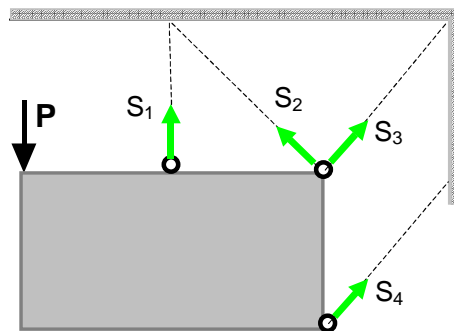
## Przykład 1.9. Wyznaczanie obciążenia granicznego metodą kinematyczną

Analizując równowagę układu w stanie granicznym wyznaczyć obciążenie graniczne dla zadanych wartości przekrojów prętów  $A$  [ $m^2$ ] i naprężeń plastycznych  $\sigma_{pl}$  [ $N/m^2$ ].



### Rozwiązanie

Otrzymany po uwolnieniu od więzów układ sił przedstawia poniższy rysunek

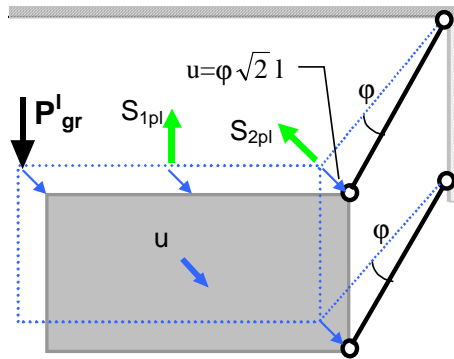


Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny, co dla powstania mechanizmu o jednym stopniu swobody oznacza konieczność uplastycznienia dwóch prętów. Jest 6 możliwości wyboru dwu spośród czterech prętów (jest to ilość kombinacji 2-elementowych bez powtórzeń ze zbioru 4-elementowego). Dla ułatwienia możemy te przypadki zapisać w tabelce:

	pręt 1	pręt 2	pręt 3	pręt 4
I	*	*		
II	*		*	
III	*			*
IV		*		*
V		*	*	
VI			*	*

Rozważmy kolejne schematy zniszczenia. W każdym schemacie ustalimy rodzaj mechanizmu, jaki powstał po uplastycznieniu 2 prętów, kierunki wywołanych obciążeniem przemieszczeń i wynikające z tego zwroty sił (siła skierowana jest przeciwnie do przemieszczenia końca pręta).

I schemat zniszczenia – uplastycznienie prętów 1 i 2



Jedyny dopuszczalny ruch wynika z obrotu prętów 3 i 4 wokół ich punktów podparcia. Powoduje to przesunięcie równoległe tarczy w wektor  $u$ .

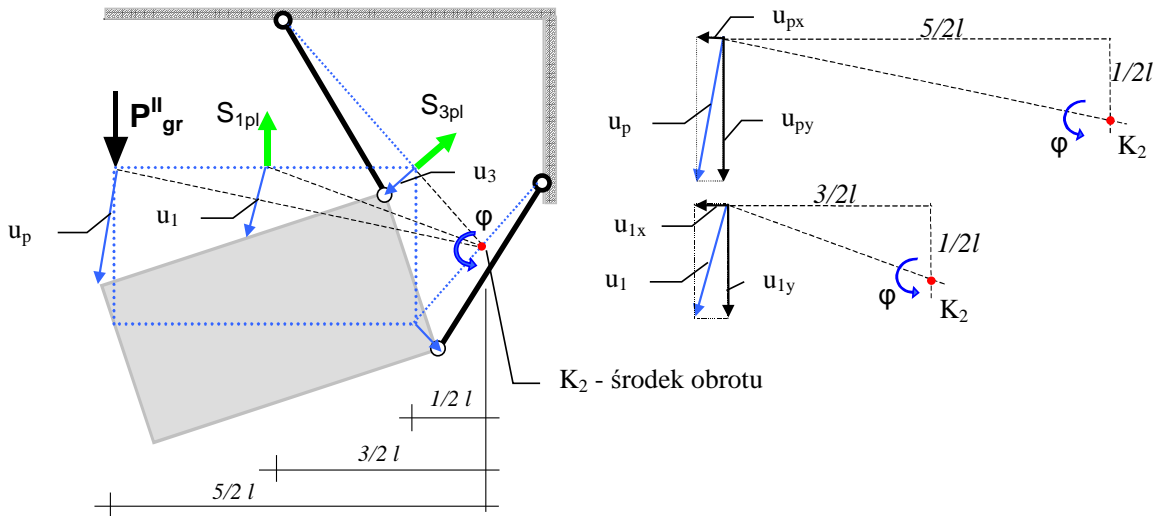
Zapisujemy zasadę pracy wirtualnej

$$P_{gr}^I u \frac{1}{\sqrt{2}} - S_{1pl} u \frac{1}{\sqrt{2}} - S_{2pl} u = 0$$

i po podstawieniu nośności prętów  $S_{1pl} = A \sigma_{pl}$ ,  $S_{2pl} = A \sigma_{pl}$  obliczamy, że dla  $u \neq 0$

$$P_{gr}^I = (1 + \sqrt{2}) A \sigma_{pl} = 2.414 A \sigma_{pl}$$

II schemat zniszczenia – uplastycznienie prętów 1 i 3



W powstałym mechanizmie tarcza obraca się wokół chwilowego środka obrotu w punkcie  $K_2$ . Równanie pracy wirtualnej

$$P_{gr}^{II} u_{py} - S_{1pl} u_{1y} - S_{3pl} u_3 = 0$$

po podstawieniu zależności

$$S_{1pl} = A \sigma_{pl}, S_{3pl} = 2A \sigma_{pl}$$

$$u_{py} = \phi \frac{5}{2} l \quad u_{1y} = \phi \frac{3}{2} l \quad u_3 = \phi \frac{\sqrt{2}}{2} l$$

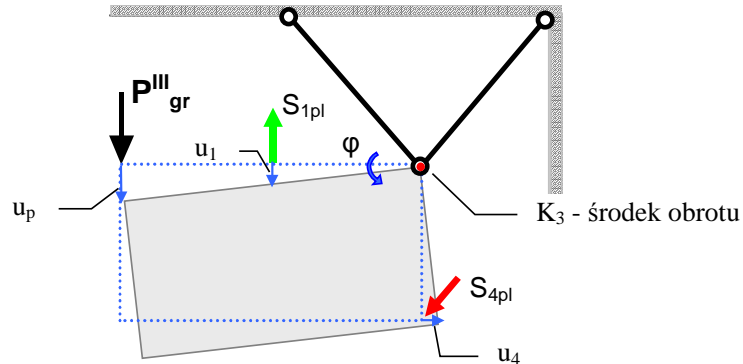
sprowadza się do równania

$$P_{gr}^{II} \frac{5}{2} \phi l - A \sigma_{pl} \frac{3}{2} \phi l - 2A \sigma_{pl} \frac{\sqrt{2}}{2} \phi l = 0,$$

z którego obliczamy dla  $\varphi \neq 0$

$$P_{gr}^{II} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{5} A\sigma_{pl} = 1.166 A\sigma_{pl}$$

### III schemat zniszczenia – uplastycznienie prętów 1 i 4



Kinematycznie dopuszczalny obrót powoduje ścisnienie pręta 4. Zatem uplastycznienie tego pręta nastąpi na skutek ścisnienia (na rysunku zaznaczono to dla zwrócenia uwagi kolorem czerwonym).

Zasada pracy wirtualnej

$$P_{gr}^{III} u_p - S_{1pl} u_1 - S_{4pl} u_4 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

po podstawieniu zależności

$$S_{1pl} = A \sigma_{pl}, S_{4pl} = A \sigma_{pl}$$

$$u_p = \varphi 2l \quad u_1 = \varphi l \quad u_4 = \varphi l$$

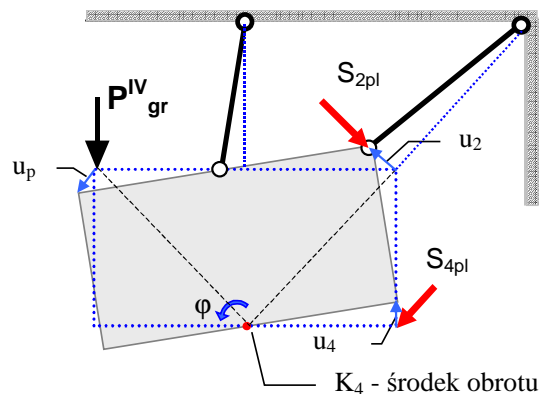
daje równanie

$$P_{gr}^{III} \varphi 2l - S_{1pl} \varphi l - S_{4pl} \varphi \frac{\sqrt{2}}{2} l = 0,$$

z którego obliczamy graniczne obciążenie dla tego schematu

$$P_{gr}^{III} = \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) A\sigma_{pl} = 0.854 A\sigma_{pl}.$$

### IV schemat zniszczenia – uplastycznienie prętów 2 i 4



Równanie pracy sił na wirtualnych przemieszczeniach ma postać

$$P_{gr}^{IV} u_p \frac{1}{\sqrt{2}} - S_{2pl} u_2 - S_{4pl} u_4 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,$$

która po podstawieniu

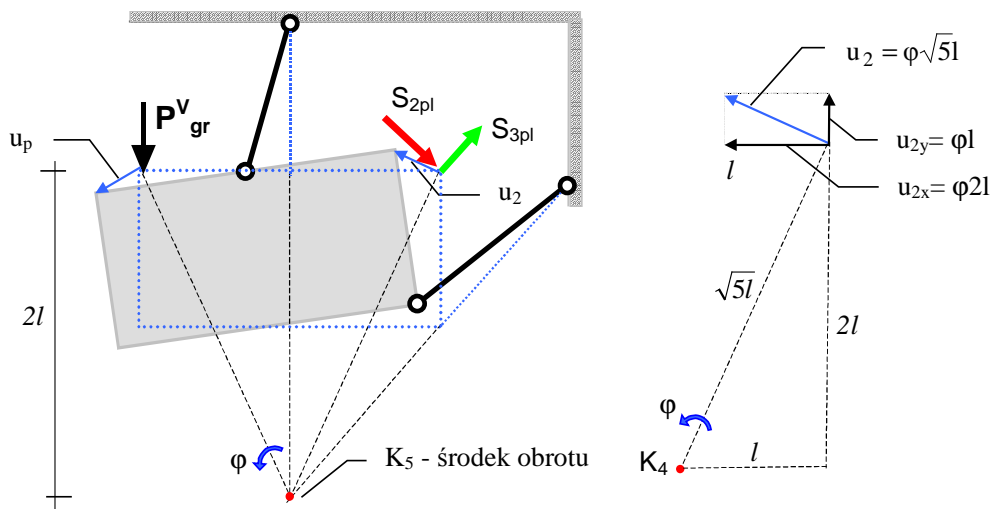
$$S_{1pl} = A \sigma_{pl}, S_{4pl} = A \sigma_{pl}$$

$$u_p = \varphi \sqrt{2}l \quad u_2 = \varphi \sqrt{2}l \quad u_4 = \varphi l$$

pozwała obliczyć obciążenie graniczne

$$P_{gr}^{IV} = \frac{3\sqrt{2}}{2} A \sigma_{pl} = 2.121 A \sigma_{pl}.$$

V schemat zniszczenia – uplastycznienie prętów 2 i 3



Po ustaleniu dopuszczalnych przemieszczeń zapisujemy równanie pracy wirtualnej

$$P_{gr}^V u_p \frac{1}{\sqrt{5}} - S_{2pl} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} u_{2x} + \frac{1}{\sqrt{2}} u_{2y} \right) - S_{3pl} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} u_{2x} - \frac{1}{\sqrt{2}} u_{2y} \right) = 0,$$

które po podstawieniu związków

$$S_{2pl} = A \sigma_{pl}, S_{3pl} = 2A \sigma_{pl}$$

$$u_p = \varphi \sqrt{5}l \quad u_2 = \varphi \sqrt{5}l \quad u_{2x} = \frac{2}{\sqrt{5}} u_2 = 2\varphi l \quad u_{2y} = \frac{1}{\sqrt{5}} u_2 = \varphi l$$

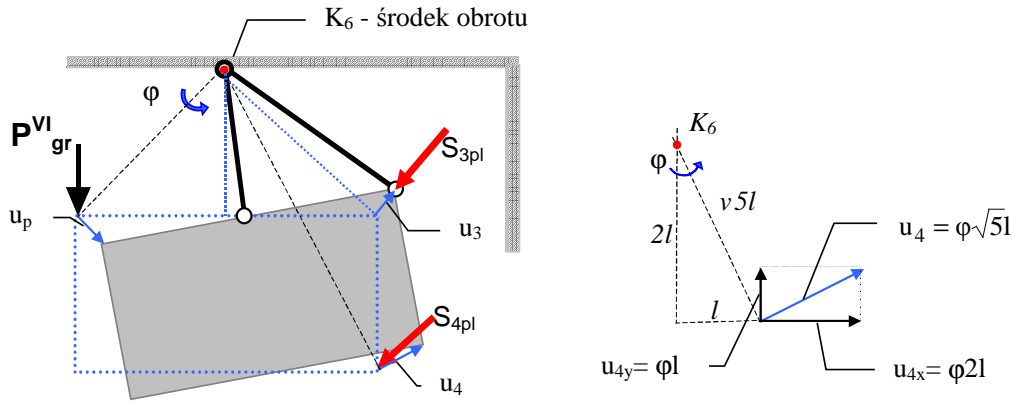
daje równanie

$$P_{gr}^V \varphi l - A \sigma_{pl} \left( \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \varphi l - 2A \sigma_{pl} \left( \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \varphi l = 0,$$

z którego wynika, że

$$P_{gr}^V = \frac{5\sqrt{2}}{2} A \sigma_{pl} = 3.536 A \sigma_{pl}$$

VI schemat zniszczenia – uplastycznienie prętów 3 i 4



Zasada pracy wirtualnej

$$P_{gr}^{VI} u_p \frac{1}{\sqrt{2}} - S_{3pl} u_3 - S_{4pl} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} u_{4x} + \frac{1}{\sqrt{2}} u_{4y} \right) = 0$$

po podstawieniu

$$S_{3pl} = 2A \sigma_{pl}, S_{4pl} = A \sigma_{pl}$$

$$u_p = \varphi \sqrt{2}l \quad u_3 = \varphi \sqrt{2}l \quad u_4 = \varphi \sqrt{5}l$$

przyjmuje postać

$$P_{gr}^{VI} \varphi l - 2A \sigma_{pl} \sqrt{2} \varphi l - A \sigma_{pl} \left( \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \varphi l = 0.$$

Wartość obciążenia granicznego wynosi zatem

$$P_{gr}^{VI} = \frac{7\sqrt{2}}{2} A \sigma_{pl} = 4.950 A \sigma_{pl}$$

Po rozpatrzeniu wszystkich możliwych mechanizmów o 1 stopniu swobody możemy określić nośność graniczną układu. Obciążenie graniczne dla rozważanego układu to wartość **najmniejsza** z uzyskanych dla kolejnych możliwych schematów zniszczenia

$$P_{gr} = \min(P_{gr}^I, P_{gr}^{II}, P_{gr}^{III}, P_{gr}^{IV}, P_{gr}^V, P_{gr}^{VI}) = P_{gr}^{III} = 0.854 A \sigma_{pl}.$$

Oznacza to jednocześnie, że zniszczenia układu nastąpi wg III analizowanego mechanizmu.

*Uwaga*

Przedstawione pełne rozwiązanie zadania metodą kinematyczną miało na celu pokazanie algorytmu tej metody. Rozwiązanie zadania okazało się dość żmudne, z uwagi na dużą liczbę możliwych mechanizmów zniszczenia. Drogę do celu znacznie skróciłoby sprawdzanie warunku plastyczności dla prętów nieuplastycznionych po każdym wyznaczeniu wartości  $P_{gr}$ . co w tym zadaniu pozwoliłoby zakończyć zadanie już po analizie III schematu zniszczenia.