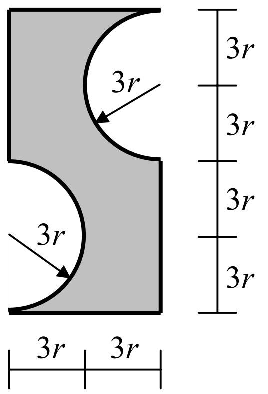
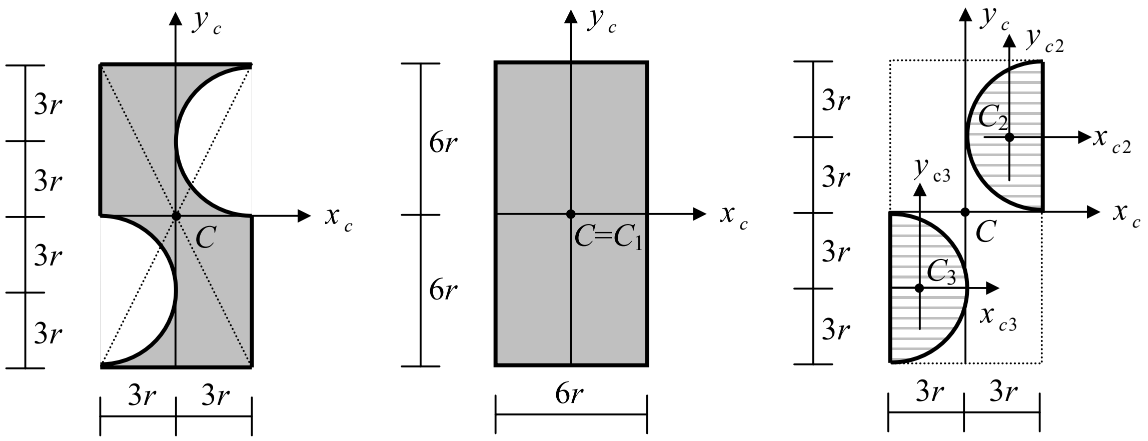
Przykład 2.1. Figura ze środkiem symetrii

Polecenie: Wyznaczyć główne centralne momenty bezwładności oraz kierunki główne dla poniższej figury korzystając z metody analitycznej i graficznej (konstrukcja koła Mohra).



Rozpatrywana figura ma środek symetrii w punkcie przecięcia przekątnych prostokąta, w który jest wpisana. Środek ciężkości figury leży w jej środku symetrii. Przez środek symetrii prowadzimy osie centralne x_c i y_c. Następnie dzielimy figurę na prostokąt i dwa półkola, które traktujemy jako pola "ujemne".



W związku z tym, że własne osie centralne figury II i III (górnego i dolnego półkola) nie pokrywają się z osiami centralnymi całej figury, będziemy korzystać z twierdzenia Steinera. Wyznaczmy zatem pola powierzchni i współrzędne środków ciężkości dla tych figur w układzie $x_c y_c$.

$$A^{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(3r)^2 = \frac{9}{2}\pi r^2, \qquad \tilde{x}_{c2} = 3r - \frac{4}{3}\cdot\frac{3r}{\pi} = 3r - \frac{4r}{\pi}, \qquad \tilde{y}_{c2} = 3r$$

$$A^{\mathrm{III}} = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(3r)^2 = \frac{9}{2}\pi r^2, \qquad \tilde{x}_{c3} = -\left(3r - \frac{4}{3}\cdot\frac{3r}{\pi}\right) = -3r + \frac{4r}{\pi}, \qquad \tilde{y}_{c3} = -3r$$

$$I_{x_c} = \frac{1}{12}\cdot 6r\cdot(12r)^3 - 2\cdot\left[\frac{1}{8}\cdot\pi\cdot(3r)^4 + \frac{9}{2}\pi r^2\cdot(3r)^2\right] = 545.91r^4$$

$$I_{y_c} = \frac{1}{12}\cdot 12r\cdot(6r)^3 - 2\cdot\left\{\left[\frac{1}{8}\cdot\pi\cdot(3r)^4 - \frac{9}{2}\pi r^2\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{3r}{\pi}\right)^2\right] + \frac{9}{2}\pi r^2\cdot\left(3r - \frac{4}{3}\cdot\frac{3r}{\pi}\right)^2\right\} = 113.91r^4$$

$$I_{x_c y_c} = 0 - 2\cdot\left[0 + \frac{9}{2}\pi r^2 \cdot 3r\cdot\left(3r - \frac{4}{3}\cdot\frac{3r}{\pi}\right)\right] = -146.47r^4$$

Wyznaczamy teraz kierunki główne.

$$tg\,2\varphi_o = \frac{-2I_{x_C y_C}}{I_{x_C} - I_{y_C}} = \frac{-2\cdot\left(-146.47r^4\right)}{545.91r^4 - 113.91r^4} = 0.6781$$

$$2\varphi_o = 0.5959\text{rad}, \qquad \varphi_o = 0.2979\text{rad}.$$

Ponieważ $I_{x_c} > I_{y_c}$ to $\varphi_1 = \varphi_o = 0.2979$ rad, natomiast $\varphi_2 = \varphi_o + \frac{\pi}{2} = \left(0.2979 + \frac{\pi}{2}\right)\text{rad} =$ $=1.8687\text{rad}$

Główne centralne momenty bezwładności przyjmują następujące wartości:

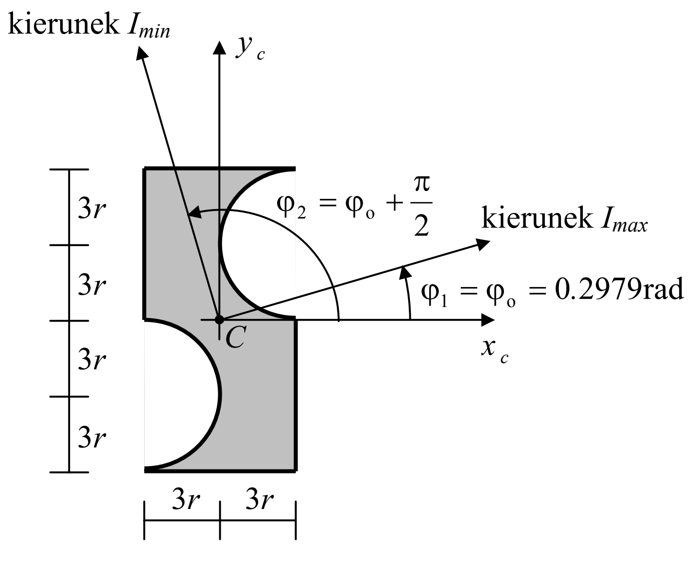
$$I_1 = I_{max} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2}\right)^2 + I_{x_c y_c}{}^2} =$$

$$= \frac{545.91r^4 + 113.91r^4}{2} + \sqrt{\left(\frac{545.91r^4 - 113.91r^4}{2}\right)^2 + \left(-146.47r^4\right)^2} = 590.89r^4$$

$$I_2 = I_{min} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2}\right)^2 + I_{x_c y_c}{}^2} =$$

$$= \frac{545.91r^4 + 113.91r^4}{2} - \sqrt{\left(\frac{545.91r^4 - 113.91r^4}{2}\right)^2 + \left(-146.47r^4\right)^2} = 68.93r^4$$

Na poniższym rysunku przedstawione są kierunki główne.

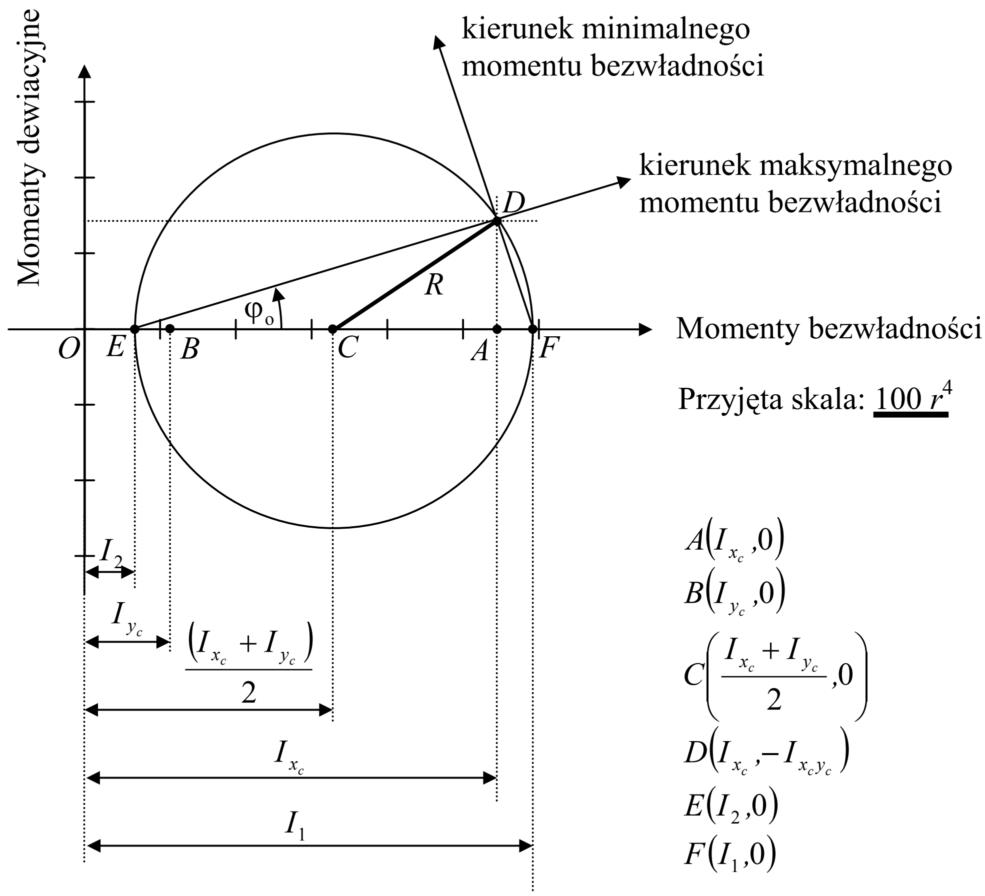


Główne centralne momenty bezwładności oraz kierunki główne można wyznaczyć metodą graficzną, stosując konstrukcję koła Mohra. Korzystamy z wyznaczonych wartości momentów bezwładności w układzie $x_c y_c$

$$I_{x_c} = 545.91r^4,\ I_{y_c} = 113.91r^4,$$

oraz wartości momentu dewiacyjnego

$$I_{x_c y_c} = -146.47 r^4 .$$



Kolejność postępowania przy rozwiązywaniu zadania metodą graficzną jest następująca:

1. Wyznaczenie położenia punktów *A* i *B*

Wartości momentów bezwładności w układzie $x_c y_c$ $I_{x_c} = 545.91 r^4$, $I_{y_c} = 113.91 r^4$ stanowią odpowiednio współrzędne punktów $A(545.91r^4,0)$ i $B(113.\ 91r^4,0)$.

2. Wyznaczenie położenia punktu *C*

Punkt $C(329.91r^4,0)$ jest środkiem odcinka $\overline{AB}$ i środkiem koła Mohra.

3. Wyznaczenie położenia punktu *D*

Po uwzględnieniu wartości $I_{x_c} = 545.91 r^4$ oraz $I_{x_c y_c} = -146.47 r^4$ otrzymamy współrzędne punktu $D(545.91r^4,-(-146.47r^4))$, czyli $D(545.91r^4,146.47r^4)$.

4. Wyznaczenie promienia koła Mohra

Łączymy punkty *C* i *D* odcinkiem $\overline{CD}$, który stanowi promień *R* koła Mohra. Promieniem tym zataczamy okrąg.

5. Wyznaczenie głównych momentów bezwładności

Koło Mohra przecina oś poziomą w dwu punktach: *E* i *F*. Długość odcinka $\overline{OE}$ odpowiada minimalnemu momentowi bezwładności I_2, natomiast długość odcinka $\overline{OF}$ odpowiada maksymalnemu momentowi bezwładności I_1.

6. Wyznaczenie kierunków głównych

Oś przechodząca przez punkty *E* i *D* jest osią maksymalnego momentu bezwładności, a oś przechodząca przez punkty *F* i *D* jest osią minimalnego momentu bezwładności.