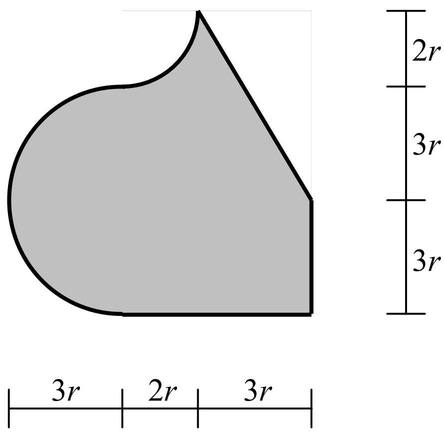
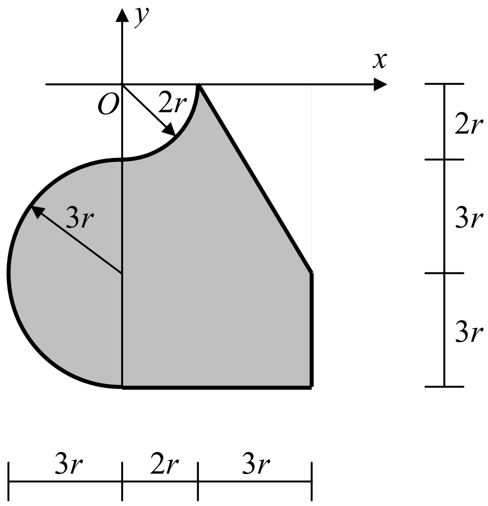
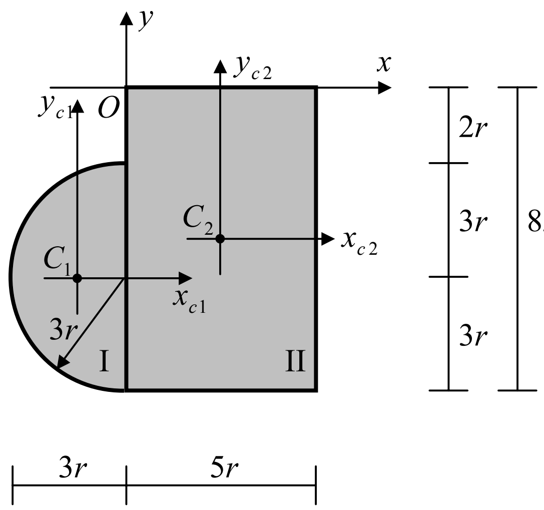
Przykład 2.2. Figura złożona

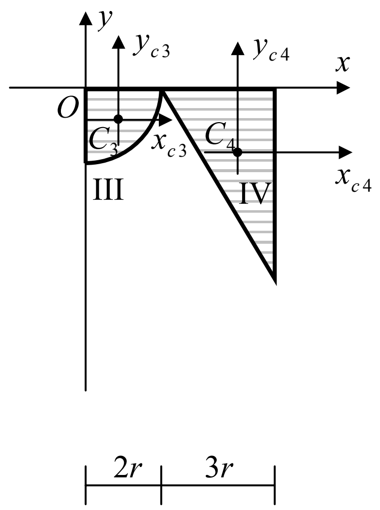
Polecenie: Wyznaczyć główne centralne momenty bezwładności oraz kierunki główne dla poniższej figury.





W celu wyznaczenia środka ciężkości oraz obliczenia wartości momentów bezwładności i momentu dewiacyjnego przyjmujemy układ współrzędnych *Oxy* oraz dzielimy rozpatrywaną figurę na cztery figury podstawowe.





Obliczamy pola figur składowych i określamy współrzędne ich środków ciężkości.

$$A^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(3r)^2 = \frac{9}{2}\pi r^2\,, \qquad \tilde{x}_{c1} = -\frac{4\cdot 3r}{3\cdot\pi} = -\frac{4r}{\pi}\,, \qquad \tilde{y}_{c1} = -5r$$

$$A^{\mathrm{II}} = 5r\cdot 8r = 40r^2\,, \qquad \tilde{x}_{c2} = \frac{1}{2}\cdot 5r = \frac{5}{2}r\,, \qquad \tilde{y}_{c2} = -\frac{1}{2}\cdot 8r = -4r$$

$$A^{\mathrm{III}} = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot(2r)^2 = \pi r^2\,, \qquad \tilde{x}_{c3} = \frac{4\cdot 2r}{3\cdot\pi} = \frac{8r}{3\pi}\,, \qquad \tilde{y}_{c3} = -\frac{4\cdot 2r}{3\cdot\pi} = -\frac{8r}{3\pi}$$

$$A^{\mathrm{IV}} = \frac{1}{2}\cdot 3r\cdot 5r = \frac{15}{2}r^2\,, \qquad \tilde{x}_{c4} = 2r + \frac{2\cdot 3r}{3} = 4r\,, \qquad \tilde{y}_{c4} = -\frac{1}{3}\cdot 5r = -\frac{5}{3}r$$

Całkowite pole figury wynosi:

$$A = A^{\mathrm{I}} + A^{\mathrm{II}} - A^{\mathrm{III}} - A^{\mathrm{IV}} = \frac{9}{2}\pi r^2 + 40r^2 - \pi r^2 - \frac{15}{2}r^2 = 43.496r^2$$

Moment statyczny względem osi y wynosi:

$$S_y = A^{\mathrm{I}} \cdot \tilde{x}_{c1} + A^{\mathrm{II}} \cdot \tilde{x}_{c2} - A^{\mathrm{III}} \cdot \tilde{x}_{c3} - A^{\mathrm{IV}} \cdot \tilde{x}_{c4} =$$

$$= \frac{9}{2}\pi r^2 \cdot \left(-\frac{4r}{\pi}\right) + 40r^2 \cdot \frac{5}{2}r - \pi r^2 \cdot \frac{8r}{3\pi} - \frac{15}{2}r^2 \cdot 4r = 49.333r^3$$

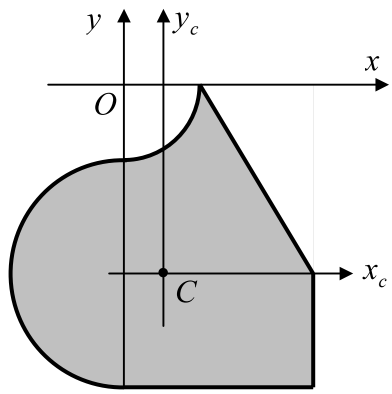
Moment statyczny względem osi x wynosi:

$$S_x = A^{\mathrm{I}} \cdot \tilde{y}_{c1} + A^{\mathrm{II}} \cdot \tilde{y}_{c2} - A^{\mathrm{III}} \cdot \tilde{y}_{c3} - A^{\mathrm{IV}} \cdot \tilde{y}_{c4} =$$

$$= \frac{9}{2}\pi r^2 \cdot (-5r) + 40r^2 \cdot (-4r) - \pi r^2 \cdot \left(-\frac{8r}{3\pi}\right) - \frac{15}{2}r^2 \cdot \left(-\frac{5}{3}r\right) = -215.519r^3$$

Współrzędne środka ciężkości rozpatrywanej figury wynoszą odpowiednio:

$$\tilde{x}_c = \frac{S_y}{A} = \frac{49.333r^3}{43.496r^2} = 1.1342r \qquad \text{oraz} \qquad \tilde{y}_c = \frac{S_x}{A} = \frac{-215.519r^3}{43.496r^2} = -4.9549r\,.$$



Wyznaczymy momenty bezwładności i moment dewiacyjny w układzie *Oxy*.

$$I_x = I_x^{\mathrm{I}} + I_x^{\mathrm{II}} - I_x^{\mathrm{III}} - I_x^{\mathrm{IV}} =$$

$$= \frac{1}{8}\pi \cdot (3r)^4 + \frac{9}{2}\pi r^2 \cdot (-5r)^2 + \frac{1}{3} \cdot 5r \cdot (8r)^3 - \frac{1}{16}\pi \cdot (2r)^4 - \frac{1}{12} \cdot 3r \cdot (5r)^3 = 1204.18r^4$$

$$I_y = I_y^{\mathrm{I}} + I_y^{\mathrm{II}} - I_y^{\mathrm{III}} - I_y^{\mathrm{IV}} =$$

$$= \frac{1}{8}\pi \cdot (3r)^4 + \frac{1}{3} \cdot 8r \cdot (5r)^3 - \frac{1}{16}\pi \cdot (2r)^4 - \left[\frac{1}{36} \cdot 5r \cdot (3r)^3 + \frac{15}{2}r^2 \cdot (4r)^2\right] = 238.25r^4$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{\mathrm{I}} + I_{xy}^{\mathrm{II}} - I_{xy}^{\mathrm{III}} - I_{xy}^{\mathrm{IV}} =$$

$$= 0 + \frac{9}{2}\pi r^2 \cdot (-5r) \cdot \left(-\frac{4r}{\pi}\right) - \frac{1}{4} \cdot (8r)^2 \cdot (5r)^2 - \left(-\frac{1}{8} \cdot (2r)^4\right) +$$

$$-\left[-\frac{1}{72} \cdot (5r)^2 \cdot (3r)^2 + \frac{15}{2}r^2 \cdot (4r) \cdot \left(-\frac{5}{3}r\right)\right] = -254.88r^4$$

Następnie wyznaczymy momenty bezwładności i moment dewiacyjny w układzie osi centralnych x_c i y_c korzystając z przekształconych wzorów Steinera:

$$I_{x_c} = I_x - A \cdot \tilde{y}_c^{\,2} = 1204.18r^4 - 43.496r^2 \cdot (-4.9549r)^2 = 136.31r^4$$

$$I_{y_c} = I_y - A \cdot \tilde{x}_c^{\,2} = 238.25r^4 - 43.496r^2 \cdot (1.1342r)^2 = 182.30r^4$$

$$I_{x_c y_c} = I_{xy} - A \cdot \widetilde{x}_c \cdot \widetilde{y}_c = -254.88 r^4 - 43.496 r^2 \cdot 1.1342 r \cdot (-4.9549 r) = -10.44 r^4 .$$

Momenty bezwładności względem głównych centralnych osi bezwładności osiągają wartości:

$$I_1 = I_{max} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2}\right)^2 + I_{x_c y_c}{}^2} =$$

$$= \frac{136.31 r^4 + 182.30 r^4}{2} + \sqrt{\left(\frac{136.31 r^4 - 182.30 r^4}{2}\right)^2 + \left(-10.44 r^4\right)^2} = 184.56 r^4$$

$$I_2 = I_{min} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2}\right)^2 + I_{x_c y_c}{}^2} =$$

$$= \frac{136.31 r^4 + 182.30 r^4}{2} - \sqrt{\left(\frac{136.31 r^4 - 182.30 r^4}{2}\right)^2 + \left(-10.44 r^4\right)^2} = 134.05 r^4$$

Kąt φ_o między osiami centralnymi $x_c y_c$ i głównymi centralnymi osiami bezwładności spełnia równanie:

$$tg\, 2\varphi_o = \frac{-2 \cdot I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}} = \frac{-2 \cdot \left(-10.44 r^4\right)}{136.31 r^4 - 182.30 r^4} = -0.4540$$

stąd $2\varphi_o = -0.4262 \text{rad}$, $\varphi_o = -0.2131 \text{rad}$.

Główna oś bezwładności, względem której moment bezwładności ma wartość $I_1 = I_{max}$ tworzy z osią x_c kąt φ_1, natomiast główna oś bezwładności, względem której moment bezwładności ma wartość $I_2 = I_{min}$ tworzy z osią x_c kąt φ_2.

W związku z tym, że $I_{x_c} < I_{y_c}$ to:

$$\varphi_1 = \varphi_o + \frac{\pi}{2} = \left(-0.2131 + \frac{\pi}{2}\right) \text{rad} = 1.3577 \text{rad}, \text{ zaś } \varphi_2 = \varphi_o = -0.2131 \text{rad}.$$