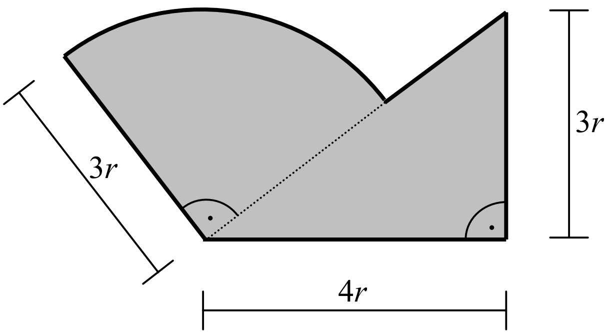
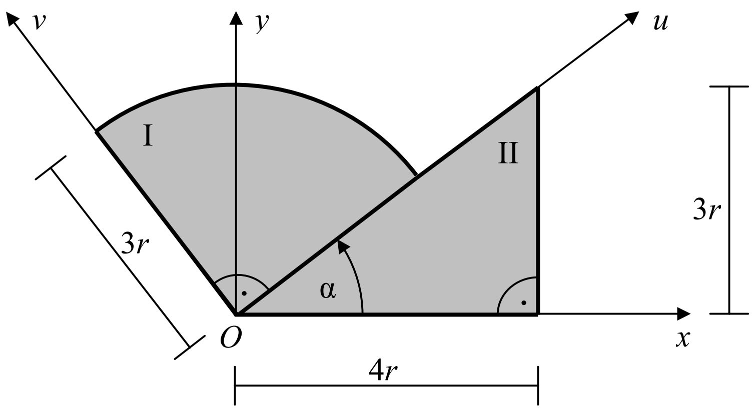
## Przykład 2.3. Figura złożona

Polecenie: Wyznaczyć główne centralne momenty bezwładności oraz kierunki główne dla poniższej figury.

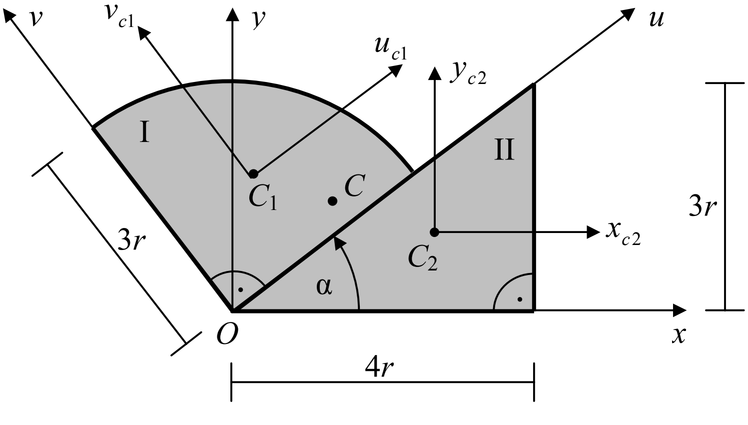



W celu wyznaczenia środka ciężkości oraz obliczenia wartości momentów bezwładności i momentu dewiacyjnego przyjmujemy dwa współśrodkowe prostokątne układy współrzędnych *Oxy* i *Ouv* oraz dzielimy rozpatrywaną figurę na dwie figury podstawowe.




Z wymiarów zadania wynika, że przeciwprostokątna trójkąta (figura II) ma długość równą :

$$\sqrt{(3r)^2+(4r)^2}=\sqrt{25r^2}=5r\text{, a więc}\quad sin\,\alpha=\frac{3}{5},\quad cos\,\alpha=\frac{4}{5}.$$



Układ współrzędnych *Ouv* obrócony jest o kąt α względem układu *Oxy*. Współrzędne dowolnego punktu spełniają zależności:

$$u = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$
$$v = y\cos\alpha - x\sin\alpha.$$

Współrzędne środka ciężkości trójkąta (II figury) w układzie *Oxy* są równe:

$$\widetilde{x}_{c2} = \frac{2}{3}\cdot 4r = \frac{8}{3}r, \qquad \widetilde{y}_{c2} = \frac{1}{3}\cdot 3r = r$$

zaś w układzie *Ouv* przyjmują wartości:

$$\widetilde{u}_{c2} = \frac{8}{3}r\cdot\frac{4}{5} + r\cdot\frac{3}{5} = \frac{41}{15}r, \qquad \widetilde{v}_{c2} = r\cdot\frac{4}{5} - \frac{8}{3}r\cdot\frac{3}{5} = -\frac{4}{5}r$$

Obliczamy pola figur składowych i określamy współrzędne ich środków ciężkości w układzie *Ouv*.

$$A^{\mathrm{I}} = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot(3r)^2 = \frac{9}{4}\pi r^2, \qquad \widetilde{u}_{c1} = \frac{4\cdot 3r}{3\pi} = \frac{4r}{\pi}, \qquad \widetilde{v}_{c1} = \frac{4\cdot 3r}{3\pi} = \frac{4r}{\pi},$$

$$A^{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\cdot 4r\cdot 3r = 6r^2, \qquad \widetilde{u}_{c2} = \frac{41}{15}r, \qquad \widetilde{v}_{c2} = -\frac{4}{5}r.$$

Całkowite pole figury wynosi:

$$A = A^{\mathrm{I}} + A^{\mathrm{II}} = \frac{9}{4}\cdot\pi r^2 + 6r^2 = 13.0686r^2$$

Moment statyczny względem osi *v* wynosi:

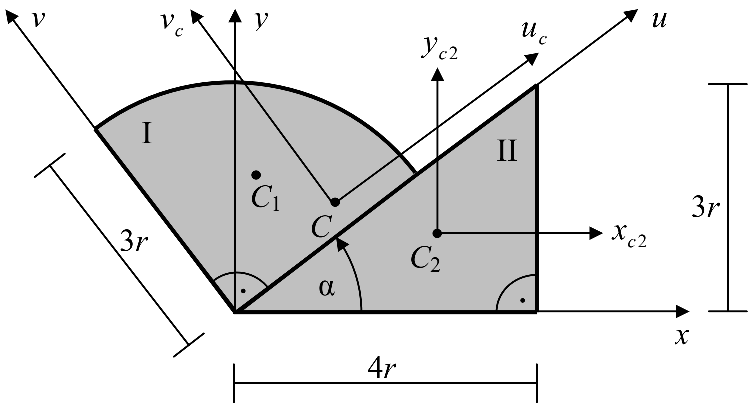
$$S_v = A^{\mathrm{I}}\cdot\widetilde{u}_{c1} + A^{\mathrm{II}}\cdot\widetilde{u}_{c2} = \frac{9}{4}\pi r^2\cdot\left(\frac{4r}{\pi}\right) + 6r^2\cdot\frac{41}{15}r = 25.4r^3$$

Moment statyczny względem osi *u* wynosi:

$$S_u = A^{\mathrm{I}}\cdot\widetilde{v}_{c1} + A^{\mathrm{II}}\cdot\widetilde{v}_{c2} = \frac{9}{4}\pi r^2\cdot\left(\frac{4r}{\pi}\right) + 6r^2\cdot\left(-\frac{4}{5}r\right) = 4.2r^3$$

Współrzędne środka ciężkości rozpatrywanej figury w układzie *Ouv* wynoszą odpowiednio:

$$\widetilde{u}_c = \frac{S_v}{A} = \frac{25.4r^3}{13.0686r^2} = 1.9436r \quad \text{oraz} \quad \widetilde{v}_c = \frac{S_u}{A} = \frac{4.2r^3}{13.0686r^2} = 0.3214r.$$



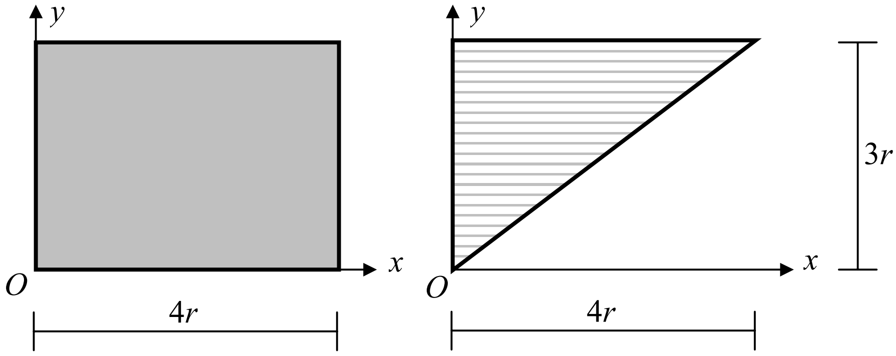

Wyznaczymy momenty bezwładności i moment dewiacyjny dla obu figur składowych w układzie osi *Ouv*. Dla pierwszej figury (ćwiartka koła) mamy

$$I_u^{\mathrm{I}} = I_v^{\mathrm{I}} = \frac{1}{16}\cdot\pi\cdot(3r)^4 = 15.904r^4, \qquad I_{uv}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{8}\cdot(3r)^4 = 10.125r^4.$$

Dla drugiej figury (trójkąt) obliczenia przeprowadzimy w układzie osi *Oxy*.

$$I_x^{\text{II}} = \frac{1}{12}\cdot 4r\cdot(3r)^3 = 9r^4$$

W celu wyznaczenia momentu bezwładności względem osi $y$ figury II, przedstawimy ją jako różnicę dwu figur, zgodnie z poniższym rysunkiem.




$$I_y^{\text{II}} = \frac{1}{3}\cdot 3r\cdot(4r)^3 - \frac{1}{12}\cdot 3r\cdot(4r)^3 = 48r^4$$

Moment dewiacyjny figury II w układzie $Oxy$ wyznaczymy korzystając z twierdzenia Steinera

$$I_{xy}^{\text{II}} = I_{x_c y_c}^{\text{II}} + A^{II}\cdot\tilde{x}_{c_2}\cdot\tilde{y}_{c_2} = \frac{1}{72}\cdot(4r)^2\cdot(3r)^2 + 6r^2\cdot\frac{8}{3}r\cdot r = 18r^4 .$$

Momenty bezwładności i moment dewiacyjny figury II w obróconym układzie $Ouv$ wyznaczamy z zależności:

$$I_u^{\text{II}} = I_x^{II}\cos^2\alpha + I_y^{\text{II}}\sin^2\alpha - 2I_{xy}^{\text{II}}\sin\alpha\cos\alpha = 9r^4\cdot\frac{16}{25} + 48r^4\cdot\frac{9}{25} - 18r^4\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = 5.76r^4$$

$$I_v^{\text{II}} = I_y^{\text{II}}\cos^2\alpha + I_x^{\text{II}}\sin^2\alpha + 2I_{xy}^{\text{II}}\sin\alpha\cos\alpha = 48r^4\cdot\frac{16}{25} + 9r^4\cdot\frac{9}{25} + 18r^4\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = 51.24r^4$$

$$I_{uv}^{\text{II}} = \left(I_x^{\text{II}} - I_y^{\text{II}}\right)\sin\alpha\cos\alpha + I_{xy}^{\text{II}}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) =$$

$$= \left(9r^4 - 48r^4\right)\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} + 18r^4\cdot\left(\frac{16}{25} - \frac{9}{25}\right) = -13.68r^4$$

Momenty bezwładności i moment dewiacyjny rozważanej figury, będącej sumą figury I i II, w obróconym układzie $Ouv$ obliczymy jako sumy momentów dla figur składowych.

$$I_u = I_u^{\text{I}} + I_u^{\text{II}} = 15.904r^4 + 5.76r^4 = 21.664r^4$$

$$I_v = I_v^{\text{I}} + I_v^{\text{II}} = 15.904r^4 + 51.24r^4 = 67.144r^4$$

$$I_{uv} = I_{uv}^{\text{I}} + I_{uv}^{\text{II}} = 10.125r^4 - 13.68r^4 = -3.555r^4 .$$

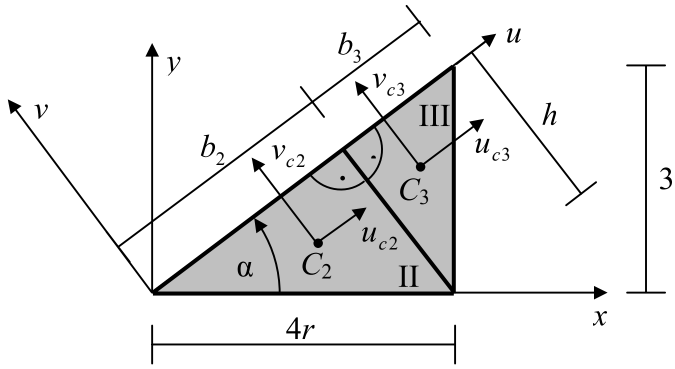
Momenty bezwładności i moment dewiacyjny trójkąta w obróconym układzie $Ouv$ możemy obliczyć bez konieczności transformowania ich przez obrót układu. Trójkąt można podzielić na dwa trójkąty prostokątne, których boki przyprostokątne są równoległe do osi układu $Ouv$ zgodnie z poniższym rysunkiem.

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$h = 4r\cdot\sin\alpha = 4r\cdot\frac{3}{5} = \frac{12}{5}r$$

$$b_2 = 4r\cdot\cos\alpha = 4r\cdot\frac{4}{5} = \frac{16}{5}r$$

$$b_3 = 3r \cdot sin\,\alpha = 3r \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{5} r$$




Pola powierzchni figury II i III oraz współrzędne ich środków ciężkości w obróconym układzie $Ouv$ wynoszą

$$A^{II} = \frac{1}{2} \cdot b_2 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{5} r \cdot \frac{12}{5} r = \frac{96}{25} r^2, \qquad A^{III} = \frac{1}{2} \cdot b_3 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{5} r \cdot \frac{12}{5} r = \frac{54}{25} r^2$$

$$\tilde{u}_{c2} = \frac{2}{3} \cdot b_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{5} r = \frac{32}{15} r \qquad \tilde{u}_{c3} = b_2 + \frac{1}{3} \cdot b_3 = \frac{16}{5} r + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} r = \frac{19}{5} r$$

$$\tilde{v}_{c2} = \tilde{v}_{c3} = -\frac{1}{3} \cdot h = -\frac{1}{3} \cdot \frac{12}{5} r = -\frac{4}{5} r$$

Momenty bezwładności i moment dewiacyjny trójkąta, będącego sumą trójkątów II i III, w obróconym układzie $Ouv$ obliczymy jako sumy momentów dla figur składowych.

$$I_u^{\ II} + I_u^{\ III} = \frac{1}{12} \cdot (b_2 + b_3) \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot 5r \cdot \left( \frac{12}{5} \cdot r \right)^3 = \frac{144}{25} r^4 = 5.76 r^4$$

$$I_v^{\ II} + I_v^{\ III} = I_{vc2}^{\ \ II} + A^{II} \cdot \tilde{u}_{c2}^{\ 2} + I_{vc3}^{\ \ III} + A^{III} \cdot \tilde{u}_{c3}^{\ 2} =$$

$$= \frac{1}{36} \cdot \frac{12}{5} r \cdot \left( \frac{16}{5} r \right)^3 + \frac{96}{25} r^2 \cdot \left( \frac{32}{15} r \right)^2 + \frac{1}{36} \cdot \frac{12}{5} r \cdot \left( \frac{9}{5} r \right)^3 + \frac{54}{25} r^2 \cdot \left( \frac{19}{5} r \right)^2 = 51.24 \mathrm{r}^4$$

$$I_{uv}^{\ II} + I_{uv}^{\ III} = I_{u_{c2} v_{c2}}^{\ \ II} + A^{II} \cdot \tilde{u}_{c2} \cdot \tilde{v}_{c2} + I_{u_{c3} v_{c3}}^{\ \ III} + A^{III} \cdot \tilde{u}_{c3} \cdot \tilde{v}_{c3} =$$

$$= -\frac{1}{72} \cdot \left( \frac{16}{5} r \right)^2 \cdot \left( \frac{12}{5} r \right)^2 + \frac{96}{25} r^2 \cdot \frac{32}{15} r \cdot \left( -\frac{4}{5} r \right) + \frac{1}{72} \cdot \left( \frac{9}{5} r \right)^2 \cdot \left( \frac{12}{5} r \right)^2 + \frac{54}{25} r^2 \cdot \frac{19}{5} r \cdot \left( -\frac{4}{5} r \right) =$$

$$= -13.68 r^4$$

Momenty bezwładności i moment dewiacyjny rozważanej figury, będącej sumą figury I, II i III w obróconym układzie $Ouv$ obliczymy jako sumy momentów dla figur składowych.

$$I_u = I_u^{\ I} + I_u^{\ II} + I_u^{\ III} = 15.904 r^4 + 5.76 r^4 = 21.664 r^4$$

$$I_v = I_v^{\ I} + I_v^{\ II} + I_v^{\ III} = 15.904 r^4 + 51.24 r^4 = 67.144 r^4$$

$$I_{uv} = I_{uv}^{\ I} + I_{uv}^{\ II} + I_{uv}^{\ III} = 10.125 r^4 - 13.68 r^4 = -3.555 r^4 .$$

Otrzymane wyniki są identyczne z uzyskanymi przy zastosowaniu podziału na dwie figury składowe.

Osiowe momenty bezwładności oraz dewiacyjny moment figury względem osi centralnych $u_c v_c$ wyznaczymy korzystając z przekształconych wzorów Steinera:

$$I_{u_c} = I_u - A \cdot \tilde{v}_c^{\ 2} = 21.664 r^4 - 13.0686 r^2 \cdot (0.3214 r)^2 = 20.3140 r^4$$

$$I_{v_c} = I_v - A\cdot\tilde{u}_c^{\,2} = 67.144r^4 - 13.0686r^2\cdot(1.9436r)^2 = 17.7763r^4$$

$$I_{u_cv_c} = I_{uv} - A\cdot\tilde{u}_c\cdot\tilde{v}_c = -3.555r^4 - 13.0686r^2\cdot 1.9436r\cdot 0.3214r = -11.7186r^4 \quad .$$

Kąt φ$_o$ między osiami prostokątnego układu $u_cv_c$ i układu głównych osi bezwładności spełnia równanie:

$$tg\,2\varphi_o = \frac{-2I_{u_cv_c}}{I_{u_c} - I_{v_c}} = \frac{-2\cdot(-11.7186r^4)}{20.3140r^4 - 17.7763r^4} = 9.2356$$

stąd $2\varphi_o = 1.4629\text{rad}$, a więc $\varphi_o = 0.7315\text{rad}$.

Główna oś bezwładności, względem której moment bezwładności ma wartość $I_1 = I_{max}$ tworzy z osią $u_c$ kąt $\varphi_1$, natomiast główna oś bezwładności, względem której moment bezwładności ma wartość $I_2 = I_{min}$ tworzy z osią $u_c$ kąt $\varphi_2$.

$I_{u_c} > I_{v_c}$ to $\varphi_1 = \varphi_o = 0.7315\text{rad}$, a $\varphi_2 = \varphi_o + \frac{\pi}{2} = \left(0.7315 + \frac{\pi}{2}\right)\text{rad} = 2.3023\text{rad}$

Momenty bezwładności względem głównych osi bezwładności $u_cv_c$ osiągają wartości ekstremalne:

$$I_1 = I_{max} = \frac{I_{u_c} + I_{v_c}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{u_c} - I_{v_c}}{2}\right)^2 + I_{u_cv_c}^{\,2}} =$$

$$= \frac{20.3140r^4 + 17.7763r^4}{2} + \sqrt{\left(\frac{20.3140r^4 - 17.7763r^4}{2}\right)^2 + (-11.7186r^4)^2} = 30.8322r^4$$

$$I_2 = I_{min} = \frac{I_{u_c} + I_{v_c}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{u_c} - I_{v_c}}{2}\right)^2 + I_{u_cv_c}^{\,2}} =$$

$$= \frac{20.3140r^4 + 17.7763r^4}{2} - \sqrt{\left(\frac{20.3140r^4 - 17.7763r^4}{2}\right)^2 + (-11.7186r^4)^2} = 7.2581r^4$$