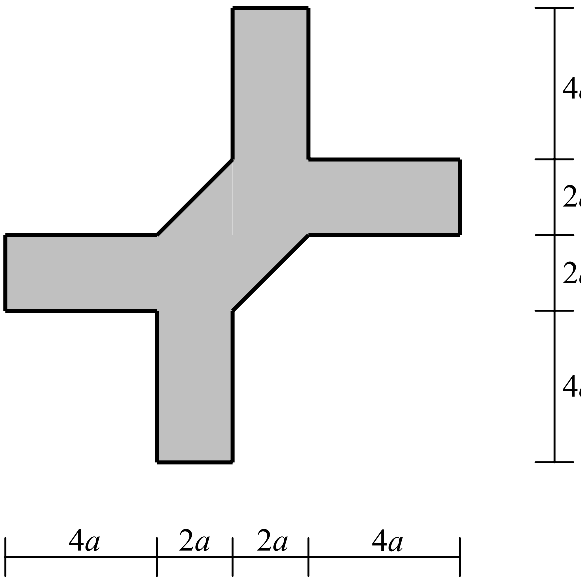
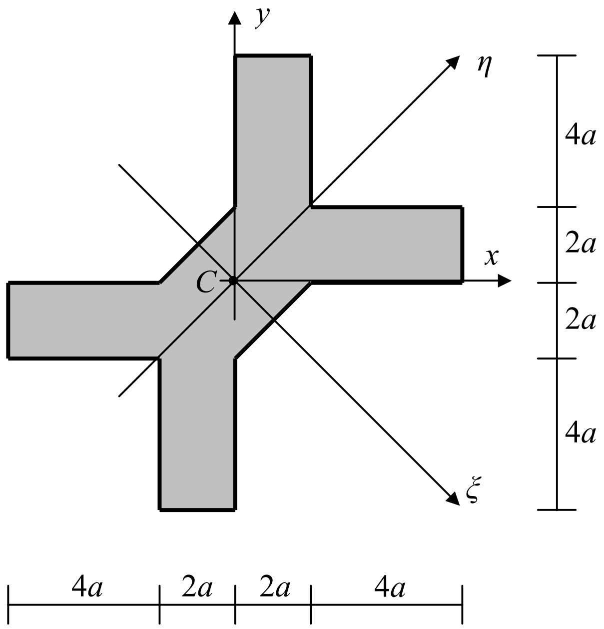
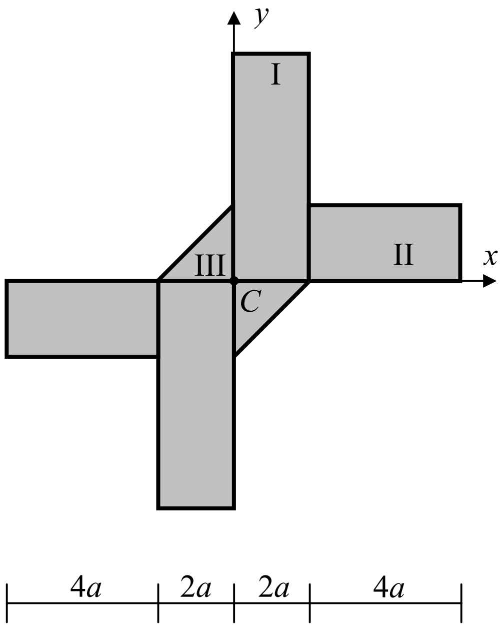
Przykład 2.4. Figura z dwiema osiami symetrii

Polecenie: Wyznaczyć główne centralne momenty bezwładności oraz kierunki główne dla poniższej figury.



Dla rozważanej figury przyjmiemy dwa współśrodkowe układy współrzędnych *xy* oraz $\xi\eta$. Oba układy są układami centralnymi. Układ $\xi\eta$ jest ponadto układem osi głównych, ponieważ osie ξ i η są osiami symetrii figury. Należy oczywiście ustalić, która z osi układu $\xi\eta$ jest osią maksymalnego momentu bezwładności, a która osią minimalnego momentu bezwładności.





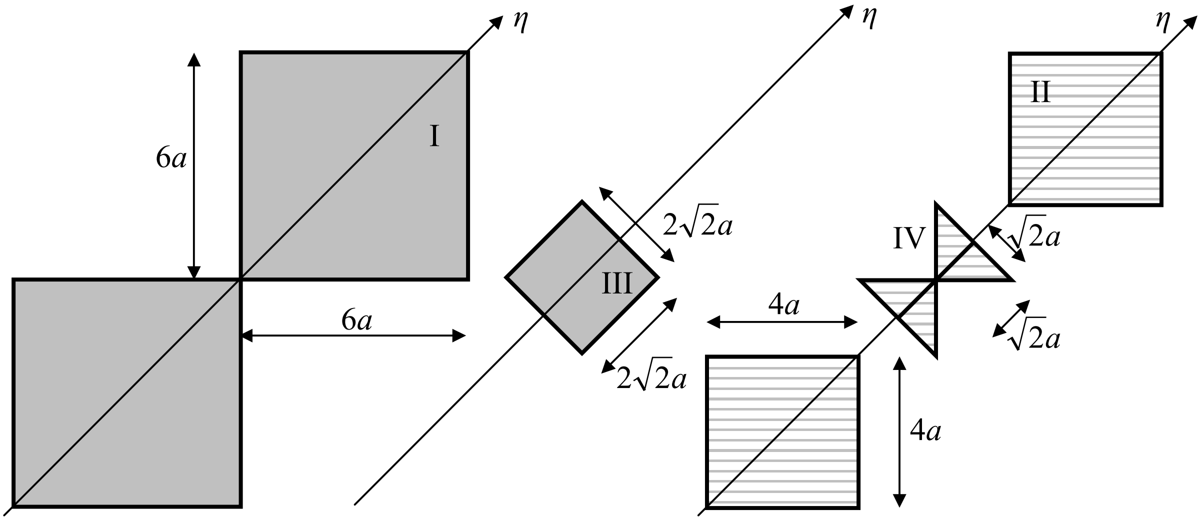
Moment bezwładności rozpatrywanej figury względem osi *x* policzymy jako podwojoną sumę momentów bezwładności figur składowych (figury I, II i III).

$$I_x = 2\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot 2a\cdot(6a)^3+\frac{1}{3}\cdot 4a\cdot(2a)^3+\frac{1}{12}\cdot 2a\cdot(2a)^3\right]=312a^4$$

Moment bezwładności figury względem osi *y* ma taką samą wartość.

$$I_y = I_x = 312a^4$$

Wyznaczymy teraz moment bezwładności względem osi η, stosując nowy podział na figury składowe. Figury II i IV traktujemy jako pola "ujemne". Momenty bezwładności figury I i II mnożymy przez dwa, natomiast moment bezwładności figury IV mnożymy przez cztery.



Centralny moment bezwładności kwadratu nie zależy od kierunku osi centralnej. Oś η jest osią centralną dla kwadratu I, II i III.

$$I_\eta = 2\cdot\left[\frac{1}{12}\cdot(6a)^4 - \frac{1}{12}\cdot(4a)^4\right] + \frac{1}{12}\cdot\left(2\sqrt{2}a\right)^4 - 4\cdot\frac{1}{12}\cdot\left(2\sqrt{2}a\right)\cdot\left(2\sqrt{2}a\right)^3 = 177\frac{1}{3}a^4$$

W dalszych obliczeniach wykorzystamy to, że suma momentów bezwładności względem obu osi układów współśrodkowych jest stała.

$$I_x + I_y = I_\xi + I_\eta$$

czyli $\quad I_\xi = I_x + I_y - I_\eta = 2\cdot I_x - I_\eta = 2\cdot 312a^4 - 177\frac{1}{3}a^4 = 446\frac{2}{3}a^4$

Z porównania wartości głównych momentów bezwładności wynika, że oś ξ jest kierunkiem maksymalnego momentu bezwładności a oś η jest kierunkiem minimalnego momentu bezwładności.

$$I_\eta = I_{min} = I_2 = 177\frac{1}{3}a^4, \qquad I_\xi = I_{max} = I_1 = 446\frac{2}{3}a^4$$