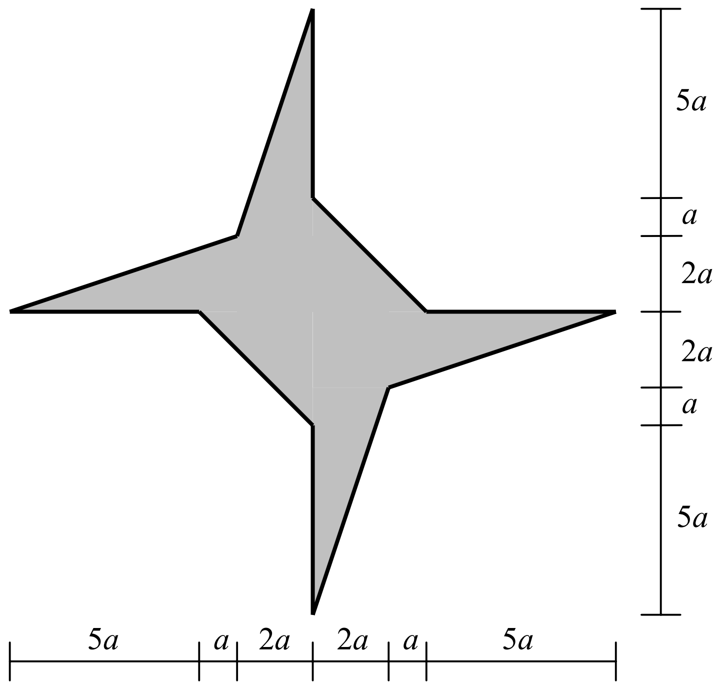
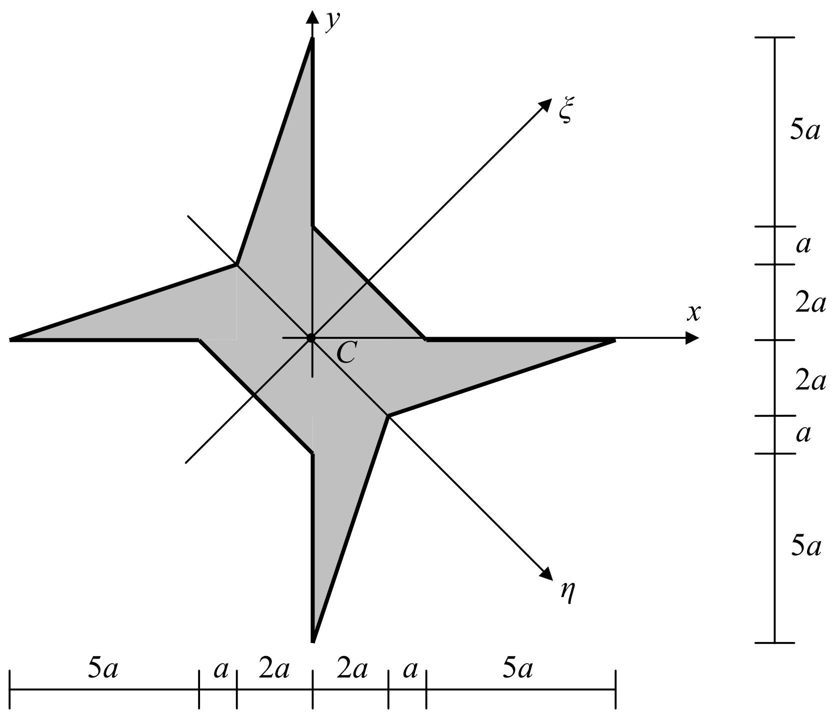
Przykład 2.5. Figura z dwiema osiami symetrii

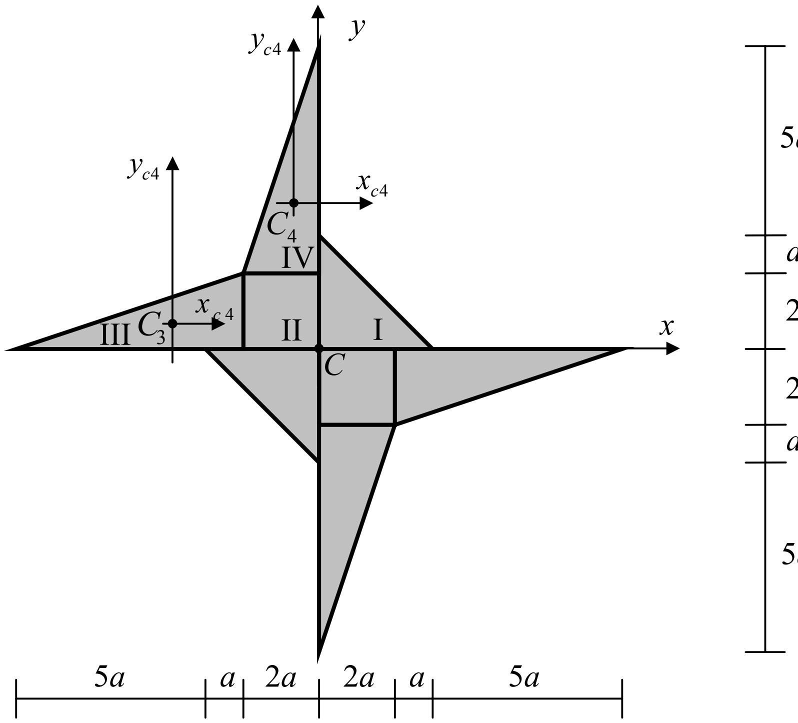
Polecenie: Wyznaczyć główne centralne momenty bezwładności oraz kierunki główne dla poniższej figury korzystając z metody analitycznej i graficznej (konstrukcja koła Mohra).



Dla rozważanej figury przyjmiemy dwa współśrodkowe układy współrzędnych xy oraz $\xi\eta$. Oba układy są układami centralnymi. Układ $\xi\eta$ jest ponadto układem osi głównych ponieważ osie ξ i η są osiami symetrii figury. Należy oczywiście ustalić, która z osi układu $\xi\eta$ jest osią maksymalnego momentu bezwładności, a która osią minimalnego momentu bezwładności.



W celu wyznaczenia momentu bezwładności względem osi x dokonamy podziału rozpatrywanej figury na figury składowe.



Moment bezwładności rozpatrywanej figury względem osi x policzymy jako podwojoną sumę momentów bezwładności względem osi x figur składowych (figury I, II, III i IV). Moment bezwładności figury względem osi y ma taką samą wartość. W przypadku figury IV należy zastosować twierdzenie Steinera. Pole powierzchni figury III i IV wynosi

$$A^{\mathrm{III}} = A^{\mathrm{IV}} = \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 6a = 6a^2$$

$$I_x = I_y = 2\cdot\left(I_x{}^{\mathrm{I}} + I_x{}^{\mathrm{II}} + I_x{}^{\mathrm{III}} + I_x{}^{\mathrm{IV}}\right) =$$

$$= 2\cdot\left\{\frac{1}{12}\cdot 3a\cdot(3a)^3 + \frac{1}{3}\cdot 2a\cdot(2a)^3 + \frac{1}{12}\cdot 6a\cdot(2a)^3 + \left[\frac{1}{36}\cdot 2a\cdot(6a)^3 + 6a^2\cdot\left(2a+\frac{1}{3}\cdot 6a\right)^2\right]\right\} =$$

$$= 248\frac{1}{6}a^4$$

Dewiacyjny moment rozpatrywanej figury w układzie xy policzymy jako podwojoną sumę momentów dewiacyjnych figur składowych (figury I, II, III i IV). W przypadku figury III i IV należy zastosować twierdzenie Steinera. Momenty dewiacyjne tych dwóch figur w układzie xy mają te same wartości, można więc w obliczeniach uwzględnić to, licząc podwojoną wartość momentu dewiacyjnego np. dla figury III.

$$I_{xy} = 2\cdot\left(I_{xy}{}^{\mathrm{I}} + I_{xy}{}^{\mathrm{II}} + I_{xy}{}^{\mathrm{III}} + I_{xy}{}^{\mathrm{IV}}\right) = 2\cdot\left(I_{xy}{}^{\mathrm{I}} + I_{xy}{}^{\mathrm{II}} + 2\cdot I_{xy}{}^{\mathrm{III}}\right) =$$

$$= 2\cdot\left\{\frac{1}{24}(3a)^2\cdot(3a)^2 - \frac{1}{4}(2a)^2\cdot(2a)^2 + 2\cdot\left[\frac{1}{72}(2a)^2\cdot(6a)^2 + 6a^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\cdot 2a\right)\cdot\left(2a+\frac{1}{3}\cdot 6a\right)\right]\right\} =$$

$$= -57\frac{1}{4}a^4$$

Główna oś bezwładności, względem której moment bezwładności ma wartość

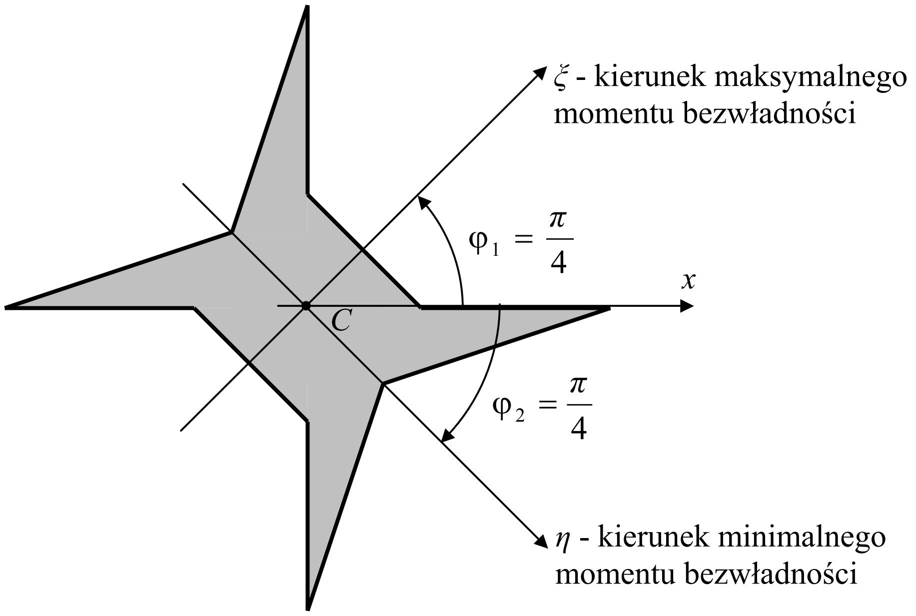
$I_1 = I_{max}$ tworzy z osią x kąt φ_1, natomiast główna oś bezwładności, względem której moment bezwładności ma wartość $I_2 = I_{min}$ tworzy z osią x kąt φ_2.

Ponieważ $I_x = I_y$, $I_{xy} < 0$ to $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, natomiast $\varphi_2 = -\frac{\pi}{4}$.

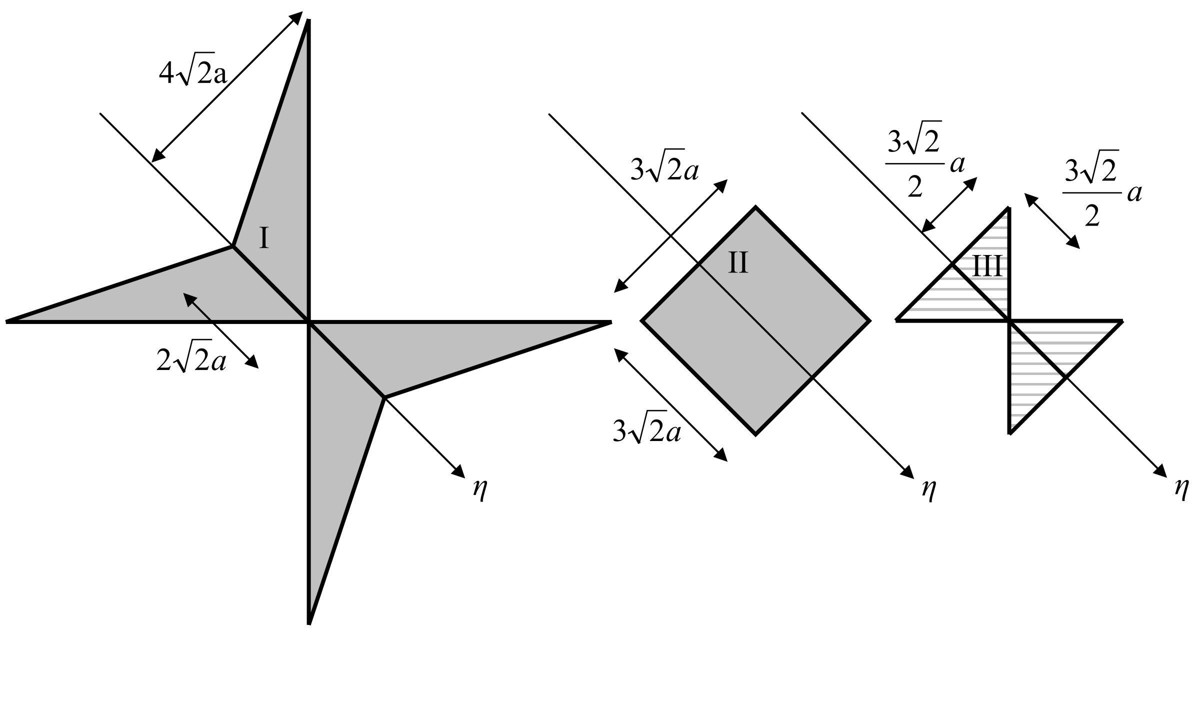
Momenty bezwładności względem głównych centralnych osi bezwładności osiągają wartości ekstremalne:

$$I_1 = I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^{\ 2}} = I_x + \sqrt{I_{xy}^{\ 2}} = 248\frac{1}{6}a^4 + \sqrt{\left(-57\frac{1}{4}a^4\right)^2} = 305\frac{5}{12}a^4$$

$$I_2 = I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^{\ 2}} = I_x - \sqrt{I_{xy}^{\ 2}} = 248\frac{1}{6}a^4 - \sqrt{\left(-57\frac{1}{4}a^4\right)^2} = 190\frac{11}{12}a^4$$



Główne centralne momenty bezwładności możemy wyznaczyć w inny sposób.



Obliczymy wartość momentu bezwładności względem osi η, stosując nowy podział na figury składowe. Figurę III traktujemy jako pole "ujemne". Momenty bezwładności figury I i III mnożymy przez cztery.

$$I_\eta = 4 \cdot \frac{1}{12} \cdot 2\sqrt{2}a \cdot \left(4\sqrt{2}a\right)^3 + \frac{1}{12} \cdot \left(3\sqrt{2}a\right)^4 - 4 \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a\right) \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a\right)^3 = 190\frac{11}{12}a^4$$

W dalszych obliczeniach wykorzystamy to, że suma momentów bezwładności względem obu osi układów współśrodkowych jest stała.

$$I_x + I_y = I_\xi + I_\eta$$

czyli $$I_\xi = I_x + I_y - I_\eta = 2 \cdot I_x - I_\eta = 2 \cdot 248\frac{1}{6}a^4 - 190\frac{11}{12}a^4 = 305\frac{5}{12}a^4$$

Z porównania wartości głównych momentów bezwładności wynika, że oś ξ jest kierunkiem maksymalnego momentu bezwładności, a oś η jest kierunkiem minimalnego momentu bezwładności.

$$I_\eta = I_{min} = I_2 = 190\frac{11}{12}a^4, \qquad I_\xi = I_{max} = I_1 = 305\frac{5}{12}a^4$$

Główne centralne momenty bezwładności oraz kierunki główne można wyznaczyć metodą graficzną, stosując konstrukcję koła Mohra. Korzystamy z wyznaczonych wartości momentów bezwładności w układzie *xy*

$$I_x = I_y = 248\frac{1}{6}a^4 = 248.167a^4$$

oraz wartości momentu dewiacyjnego

$$I_{xy} = -57\frac{1}{4}a^4 = -57.250a^4.$$

Kolejność postępowania przy wyznaczaniu głównych momentów bezwładności i kierunków głównych metodą graficzną jest następująca:

1. Wyznaczenie położenia punktów *A* i *B*

Wartości momentów bezwładności w układzie *xy* $I_x = I_y = 248.167a^4$ stanowią odpowiednio współrzędne punktów $A\left(I_x = 248.167a^4, 0\right)$ i $B\left(I_y = 248.167a^4, 0\right)$. W rozpatrywanym zadaniu położenie punktów $A\left(248.167a^4, 0\right)$ i $B\left(248.167a^4, 0\right)$ jest wspólne.

2. Wyznaczenie położenia punktu *C*

Punkt $C\left(0.5 \cdot \left(I_x + I_y\right) = 248.167a^4, 0\right)$, czyli $C\left(248.167a^4, 0\right)$, jest środkiem odcinka $\overline{AB}$ i środkiem koła Mohra. W rozpatrywanym zadaniu położenie punktów *C*, *A* i *B* jest wspólne.

3. Wyznaczenie położenia punktu *D*

Po uwzględnieniu wartości $I_x = 248.167a^4$ oraz $I_{xy} = -57.250a^4$ otrzymamy współrzędne punktu $D\left(I_x = 248.167a^4, -I_{xy} = -\left(-57.250a^4\right)\right)$, czyli $D\left(248.167a^4, 57.250a^4\right)$.

4. Wyznaczenie promienia koła Mohra

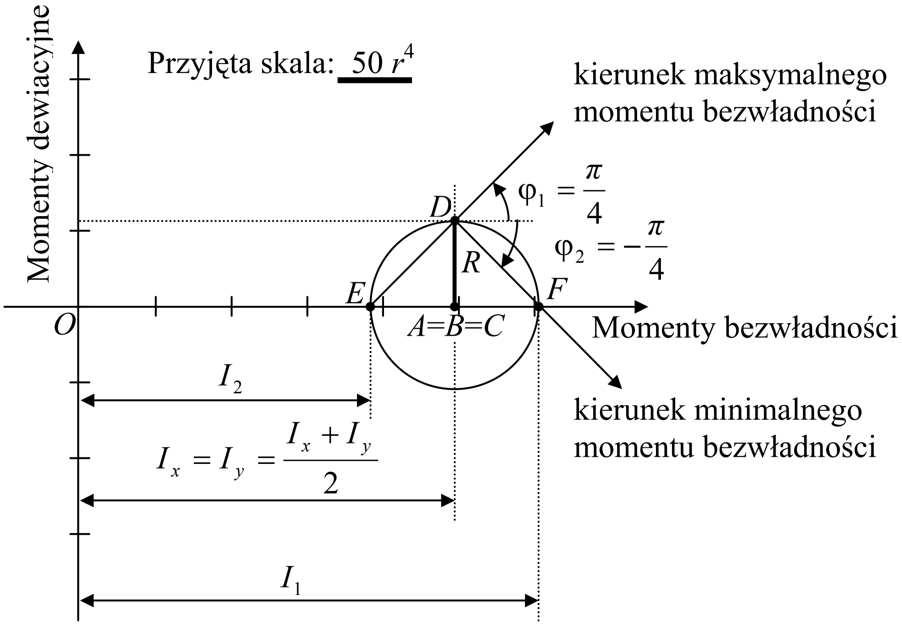
Łączymy punkty *C* i *D* odcinkiem $\overline{CD}$, który stanowi promień *R* koła Mohra. Promieniem tym zataczamy okrąg.

5. Wyznaczenie głównych momentów bezwładności

Koło Mohra przecina oś poziomą w dwu punktach: *E* i *F*. Współrzędne tych punktów są następujące: $E\left(190.917a^4, 0\right)$, $F\left(305.417a^4, 0\right)$. Długość odcinka $\overline{OE}$ odpowiada minimalnemu momentowi bezwładności I_2, natomiast długość odcinka $\overline{O\mathrm{F}}$ odpowiada maksymalnemu momentowi bezwładności I_1.

6. Wyznaczenie kierunków głównych

Oś przechodząca przez punkty E i D jest osią maksymalnego momentu bezwładności, a oś przechodząca przez punkty F i D jest osią minimalnego momentu bezwładności.



$A(I_x, 0)$

$B(I_y, 0)$

$C\left(\frac{I_x + I_y}{2}, 0\right)$

$D(I_x, -I_{xy})$

$E(I_2, 0)$

$F(I_1, 0)$