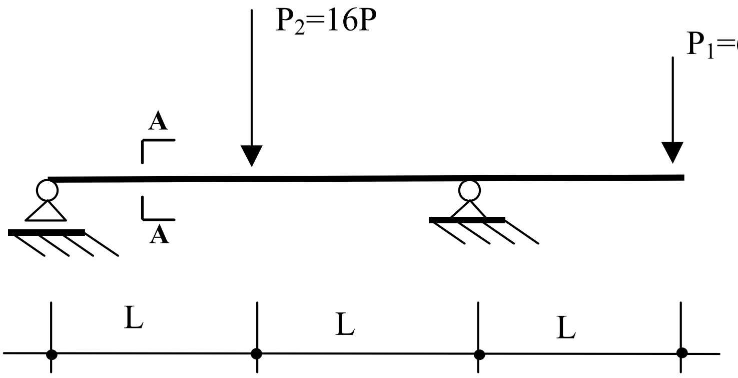
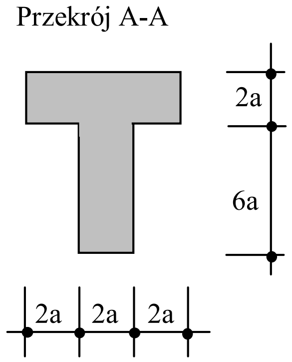
Przykład 3.1. Projektowanie przekroju zginanego

Na belkę wykonaną z materiału o wytrzymałości różnej na ściskanie i rozciąganie działają dwie siły P_1 i P_2. Znając wartości tych sił, schemat statyczny belki, wartości dopuszczalnego naprężenia na rozciąganie i ściskanie oraz kształt przekroju poprzecznego wyznacz minimalną długość **a** krawędzi przekroju tak aby nigdzie w belce nie nastąpiło przekroczenie naprężeń dopuszczalnych.





Dane liczbowe:

P=1kN,
L=1m,
naprężenie dopuszczalne na rozciąganie k_r=1.2 MPa ,
naprężenie dopuszczalne na ściskanie k_c=1.6 MPa.

Uwaga
Szukany wymiar „**a**” wyznaczymy rozwiązując nierówności będące matematycznym sformułowaniem warunku nieprzekraczania w żadnym punkcie belki naprężeń dopuszczalnych k_r i k_c.
W naszym zadaniu, jak się przekonamy, odległości górnej i dolnej krawędzi belki od osi obojętnej przy zginaniu są różne, różne są także zadane wartości naprężeń dopuszczalnych k_c i k_r , a funkcja momentu gnącego M(x) względem osi belki zmienia znak. W takim zadaniu musimy sprawdzić maksymalne naprężenia normalne od zginania w dwóch przekrojach belki. W przekroju, w którym moment gnący osiąga maksimum i w przekroju, w którym osiąga minimum. W wypadku gdyby k_c i k_r były jednakowe lub gdyby przekrój poprzeczny miał taki kształt ,że odległości górnej i dolnej krawędzi belki od osi obojętnej przy zginaniu byłyby jednakowe wówczas do rozwiązania zadania wystarczy określić największe naprężenie normalne tylko w tym przekroju, w którym występuje największy co do wartości bezwzględnej moment zginający.
Rozwiązanie
Rozwiązanie składać się będzie z następujących kroków:

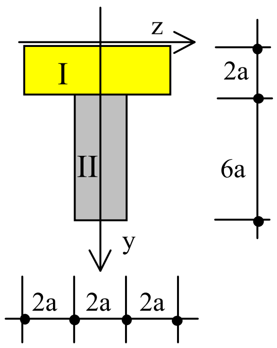
1. obliczenie charakterystyk przekroju poprzecznego belki,
2. wyznaczenie funkcji momentu gnącego,
3. wybranie przekrojów do analizy naprężeń,
4. znalezienie naprężeń normalnych,
5. zapisanie nierówności ograniczającej naprężenia i wyznaczenie szukanej wielkości.

Wyznaczmy charakterystyki przekroju poprzecznego potrzebne do wyznaczania naprężeń przy prostym zginaniu.
W celu dokonania obliczeń podzielimy figurę na dwa prostokąty, wyznaczymy środek ciężkości i wartość momentu bezwładności względem osi poziomej. W obliczeniach uwzględnimy, że przekrój poprzeczny ma oś symetrii.
Współrzędne środka ciężkości wyznaczamy ze wzoru:

$$y_c = \frac{\sum_i S_{zi}}{\sum_i F_i},$$

We wzorze przyjęto oznaczenia:
F_i - pole powierzchni i-tej figury, na które podzielono cały przekrój,
$S_{zi} = F_i y_i$ - jest momentem statycznym względem osi z i-tej figury, na które podzielono cały przekrój. Moment statyczny względem osi z równy jest iloczynowi pola powierzchni tej figury przez współrzędną jej środka ciężkości y_i.

Rachunki możemy szybko przeprowadzić wykorzystując arkusz kalkulacyjny.



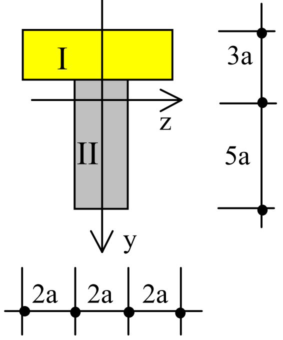
Tabela, w której wyznaczamy położenie środka ciężkości

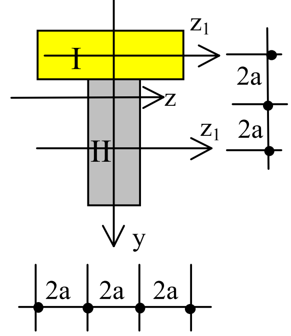
nr figury	pole pow.	y	S_z
I	12 [a^2]	1 [a]	12 [a^3]
II	12 [a^2]	5 [a]	60 [a^3]
Σ	24 [a^2]	**3 [a]**	72 [a^3]

$$y_c = \frac{\sum_i S_{zi}}{\sum_i F_i} = \frac{72a^3}{24a^2} = 3a$$

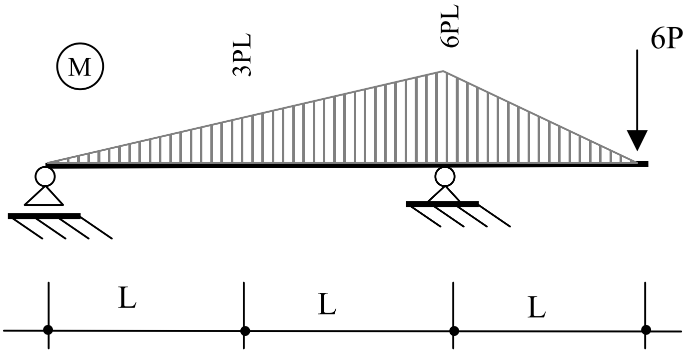
Po wyznaczeniu położenia środka ciężkości przekroju obliczamy moment bezwładności główny, centralny względem osi poziomej z.

$$I_z = \frac{6a\cdot(2a)^3}{12} + (2a)^2\cdot 12a + \frac{2a\cdot(6a)^3}{12} + (2a)^2\cdot 12a =$$
$$= 4a^4 + 48a^4 + 36a^4 + 48a^4 = 136a^4$$

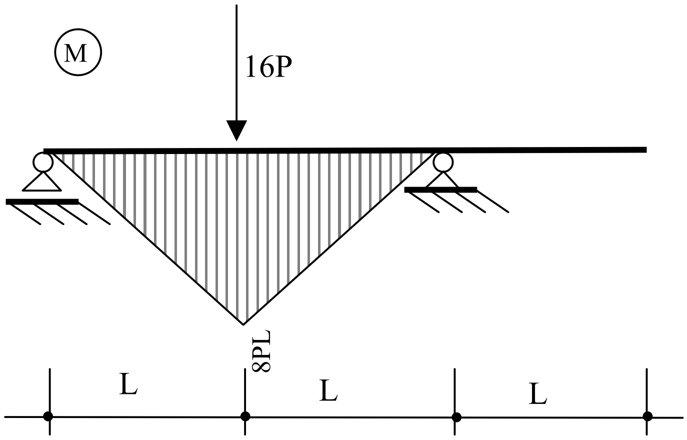




W kolejnym kroku należy wyznaczyć wykresy momentu gnącego. Możemy wykonać to zadanie wykorzystując zasadę superpozycji. Narysujemy łatwe do wyznaczenia wykresy momentów dla osobno działających sił czynnych P_1 i P_2. Moment gnący dla jednocześnie działających sił jest sumą momentów dla sił rozpatrywanych osobno.

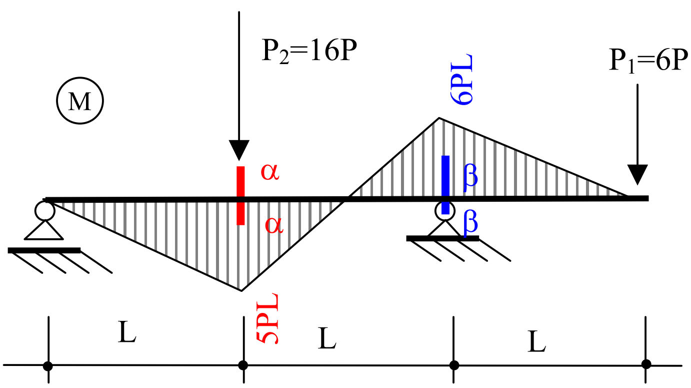


Wykres momentu gnącego dla belki obciążonej jedynie siła P_1=6P



Wykres momentu gnącego dla belki obciążonej jedynie siła P_2=16P

Sumując momenty przedstawione na poprzednich dwóch wykresach otrzymujemy ostatecznie wykres momentów dla obciążenia obydwoma siłami jednocześnie.



Momenty osiągają wartości ekstremalne w dwóch przekrojach.
W przekroju **α-α** moment M_α wynosi 5PL a w przekroju **β-β** M_β wynosi -6PL.

Obliczymy dalej maksymalne i minimalne naprężenia normalne od zginania w przekrojach, w których momenty osiągają wartości ekstremalne.
Naprężenie normalne przy zginaniu prostym wyraża się wzorem:

$$\sigma = \frac{M}{Jz} y ,$$

gdzie M - moment gnący,
Jz - moment bezwładności przekroju względem osi głównej centralnej z,
y - współrzędna warstwy dla której wyznaczane jest naprężenie.

Największe wartości naprężenia występują w warstwach belki, dla których współrzędna y osiąga wartości ekstremalne, czyli na górnej i dolnej krawędzi przekroju. Na niżej przedstawionym rysunku oznaczono dwa punkty A i B, w których badać będziemy naprężenia. Zaczniemy od obliczeń dla przekroju **α-α**.

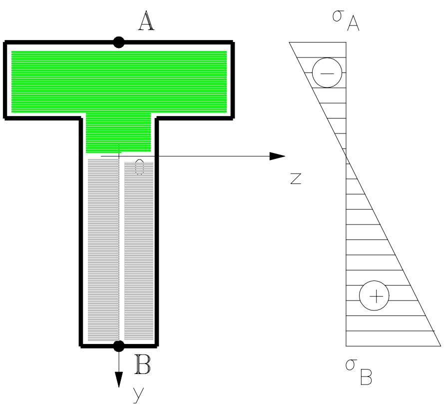
Przekrój **α-α**

Moment gnący M_α=5PL= 5 kNm
Punkt A
y = -3a

$$\sigma_A = \frac{M}{Jz} y = \frac{5[kNm]}{136[a^4]}(-3[a]) = -\frac{15[kNm]}{136[a^3]}$$

Punkt B
y = 5a

$$\sigma_B = \frac{M}{Jz} y = \frac{5[kNm]}{136[a^4]}(5[a]) = \frac{25[kNm]}{136[a^3]}$$



wykres naprężenia normalnego od zginania

Następnie wykonamy obliczenia dla przekroju **β-β**.

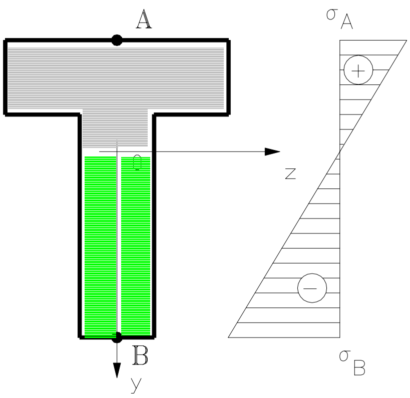
Przekrój **β-β**

Moment gnący M_β =-6PL= -6 kNm
Punkt A
y = -3a

$$\sigma_A = \frac{M}{Jz} y = \frac{-6[kNm]}{136[a^4]}(-3[a]) = \frac{18[kNm]}{136[a^3]}$$

Punkt B
y = 5a

$$\sigma_B = \frac{M}{Jz} y = \frac{-6[kNm]}{136[a^4]}(5[a]) = -\frac{30[kNm]}{136[a^3]}$$



wykres naprężenia normalnego od zginania

Na podanych wyżej rysunkach obszary przekroju poprzecznego , w którym występuje ściskanie oznaczono kolorem zielonym, a obszary rozciągane oznaczono kolorem szarym.

Do dalszej analizy wybierzemy dwie ekstremalne wartości naprężenia. Największe naprężenie rozciągające i największe ściskające.(wybrane wielkości oznaczono kołami)
Zapiszmy warunki nie przekraczania naprężeń dopuszczalnych.
Warunek wytrzymałości na rozciąganie wyraża nierówność:

$$\frac{25[kNm]}{136[a^3]} \le kr = 1.2[MPa]$$

Warunek wytrzymałości na ściskanie wyraża nierówność:

$$\frac{30[kNm]}{136[a^3]} \le kc = 1.6[MPa]$$

Z nierówności pierwszej mamy

$$\frac{25[kNm]}{136[a^3]\cdot 1200[{kN}/{m^2}]} \le a^3 \text{, a stąd} \quad a \ge 5.35[cm]$$

Z drugiej nierówności dostaniemy

$$\frac{30[kNm]}{136[a^3]\cdot 1600[{kN}/{m^2}]} \le a^3 \text{, a stąd} \quad a \ge 5.17[cm]$$

Ostatecznie naprężenia nie będą przekraczały wartości dopuszczalnych jeżeli wymiar „a" przekroju będzie większy bądź równy 5.35 cm. Zdecydowały o tym naprężenia w punkcie B przekroju α-α . Warto zauważyć, że w przekroju tym moment co do wartości bezwzględnej nie osiąga maksimum.