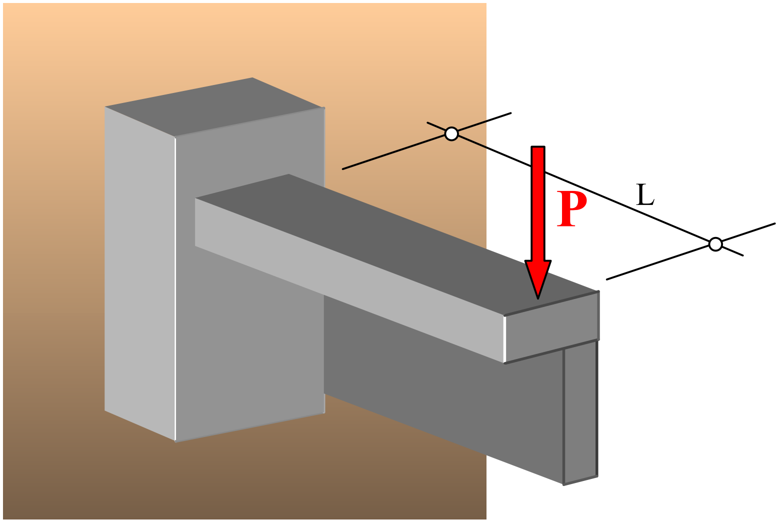
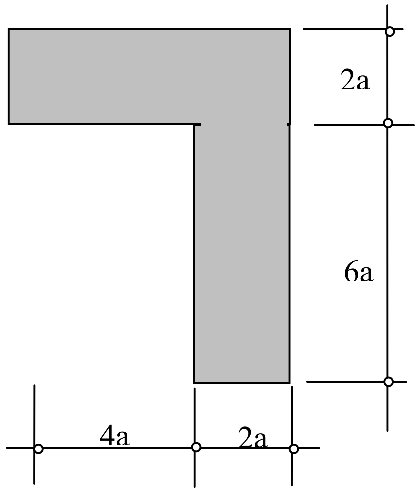
Przykład 3.2. Zginanie ukośne. Układ współrzędnych (0xy)

Wyznacz rozkład naprężenia normalnego w przekroju podporowym belki wspornikowej o długości L obciążonej na końcu swobodnym pionową siłą P. Wymiary przekroju poprzecznego belki podane są na rysunku zamieszczonym poniżej.
Oblicz naprężenia przyjmując następujące wartości liczbowe:
P=20kN, L=200cm, a=1cm

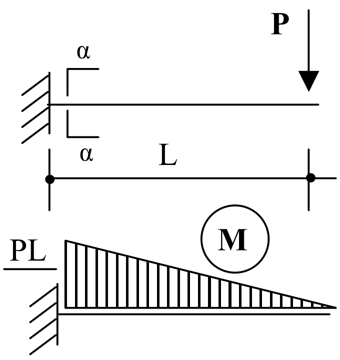


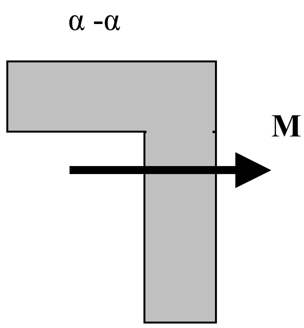
Przekrój poprzeczny



Rozwiązanie
Obliczmy moment gnący i charakterystyki przekroju. Przekonamy się czy wektor momentu gnącego pokrywa się z jedną z głównych osi momentów bezwładności przekroju.
Przed przystąpieniem do obliczeń warto przez chwilę zastanowić się nad zadaniem.
Przyglądając się kształtowi przekroju poprzecznego łatwo możemy przewidzieć, że osie główne są ustawione skośnie. Ponieważ wektor momentu jest poziomy (prostopadły do siły P) przewidujemy, że mamy odczynienia ze zginaniem ukośnym.

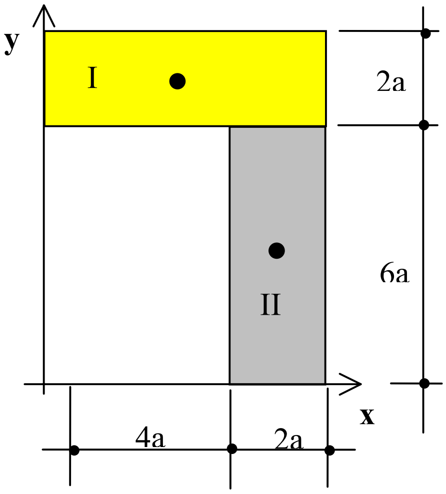
Wyznaczmy wektor momentu gnącego w utwierdzeniu.
M=L P=PL=4000[kNcm]





Obliczmy momenty bezwładności przekroju poprzecznego.

Podzielimy figurę na dwa prostokąty, wyznaczymy środek ciężkości i wartość momentów bezwładności względem osi centralnych.



Współrzędne środka ciężkości wyznaczamy ze wzorów:

$$x_c = \frac{\sum_i S_{yi}}{\sum_i F_i},$$

$$y_c = \frac{\sum_i S_{xi}}{\sum_i F_i}.$$

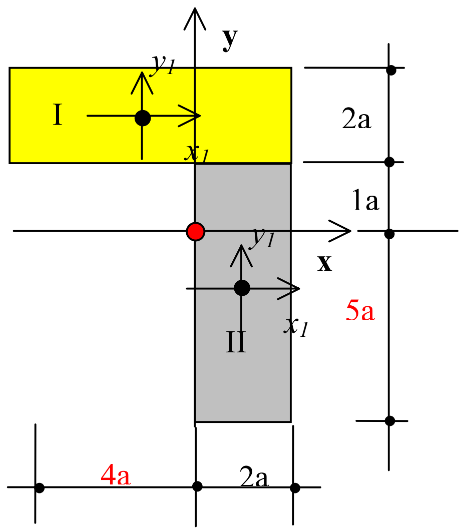
F_i -oznacza pole powierzchni i-tej figury, na które podzielono cały przekrój.
$S_{yi} = F_i x_i$ - jest momentem statycznym i-tej figury, na które podzielono cały przekrój względem osi y. Moment statyczny względem osi y równy jest iloczynowi pola powierzchni tej figury przez współrzędną jej środka ciężkości x_i.
$S_{xi} = F_i y_i$ - jest momentem statycznym i-tej figury, na które podzielono cały przekrój względem osi x. Moment statyczny względem osi x równy jest iloczynowi pola powierzchni tej figury przez współrzędną jej środka ciężkości y_i.

Obliczenia możemy szybko przeprowadzić wykorzystując arkusz kalkulacyjny.

nr figury	F pole powierzchni	x	Sy moment statyczny	y	Sx moment statyczny
I	12 [a2]	3 [a]	36 [a3]	7 [a]	84 [a3]
II	12 [a2]	5 [a]	60 [a3]	3 [a]	36 [a3]
	24 [a2]	4 [a]	96 [a3]	5 [a]	120 [a3]

$$x_c = \frac{\sum_i S_{yi}}{\sum_i F_i} = \frac{96a^3}{24a^2} = 4a \qquad y_c = \frac{\sum_i S_{xi}}{\sum_i F_i} = \frac{120a^3}{24a^2} = 5a$$

Obliczmy teraz korzystając ze wzorów Steinera wartości momentów bezwładności względem osi centralnych **x** i **y** .Niech osie x_1 i y_1 oznaczają osie centralne dla poszczególnych figur, na które podzielono cały przekrój.



$$I_x = \boxed{\frac{6a \cdot (2a)^3}{12} + (2a)^2 \cdot 12a} + \boxed{\frac{2a \cdot (6a)^3}{12} + (2a)^2 \cdot 12a} = 136a^4$$

$$I_y = \boxed{\frac{2a \cdot (6a)^3}{12} + (-a)^2 \cdot 12a} + \boxed{\frac{6a \cdot (2a)^3}{12} + a^2 \cdot 12a} = 64a^4$$

$$I_{xy} = \boxed{0 + 2a \cdot (-a) \cdot 12a} + \boxed{0 + (-2a) \cdot a \cdot 12a} = -48a^4$$

Dalszą część zadania możemy rozwiązać na dwa sposoby.

Można wyznaczyć osie główne centralne, znaleźć współrzędne wektora momentu gnącego w osiach głównych centralnych i wykorzystać wzór na naprężenia przy zginaniu dla osi głównych centralnych.

Drugi sposób polega na wykorzystaniu wzoru na naprężenia przy zginaniu wyprowadzonego dla osi centralnych.

Metoda druga jest krótsza, ale daje mniej możliwości sprawdzenia poprawności naszego rozwiązania.

Rozwiązując metodą pierwszą znamy ustawienie osi głównych i możemy sprawdzić czy wyznaczona przez nas oś obojętna dla zginania ukośnego jest odchylona od kierunku wektora momentu w stronę osi głównej względem, której moment bezwładności jest mniejszy.

Przedstawmy więc obydwa rozwiązania.

Metoda I – rozwiązanie w osiach głównych centralnych.

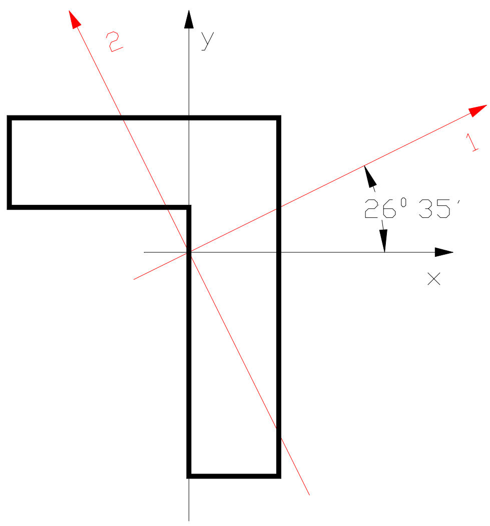
Wyznaczmy osie główne centralne i główne centralne momenty bezwładności.

$$I_1 = \frac{(I_x + I_y)}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^{\ 2}} = 160a^4$$

$$I_2 = \frac{(I_x + I_y)}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^{\ 2}} = 40a^4$$

$$\mathrm{tg}\,2\beta = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{4}{3}, \qquad \beta = 0.4636 + n\cdot\pi/2[rad], \quad \beta = 26^0 35 + n45^0{}'$$

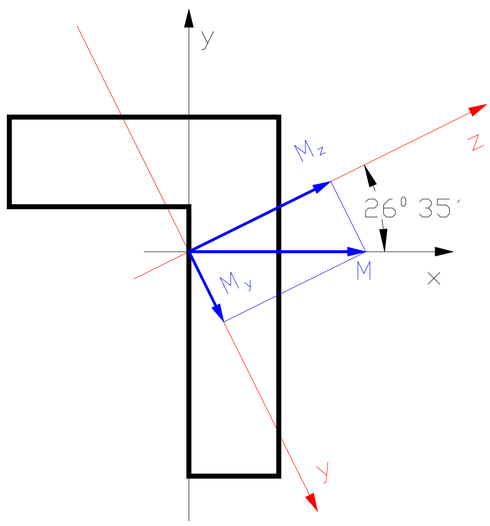
Ponieważ moment dewiacyjny I_{xy} ma wartość ujemną, więc oś główna, względem której moment bezwładności osiąga maksimum przechodzi przez pierwszą ćwiartkę układu (0xy).



Zmieńmy układ osi na taki, jaki tradycyjnie stosuje się w zadaniach na zginanie belek.
Zamiast układu (012) wprowadzimy układ (0yz).
Zapiszmy momenty bezwładności względem osi nowego układu:

$I_z = I_1 = 160a^4$

$I_y = I_2 = 40a^4$



Obliczmy współrzędne momentu gnącego w układzie (0yz).

M_y=M sin($26^0 35'$)=0.4472 M

M_z=M cos($26^0 35'$)=0.8944 M

Rozkład naprężenia normalnego od zginania wyznaczymy ze wzoru:

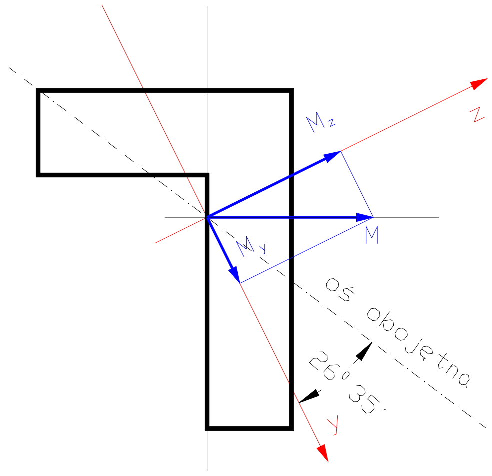
$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

Podstawiając wartości M=PL i $I_y=40a^4$, $I_z=160a^4$ otrzymujemy:

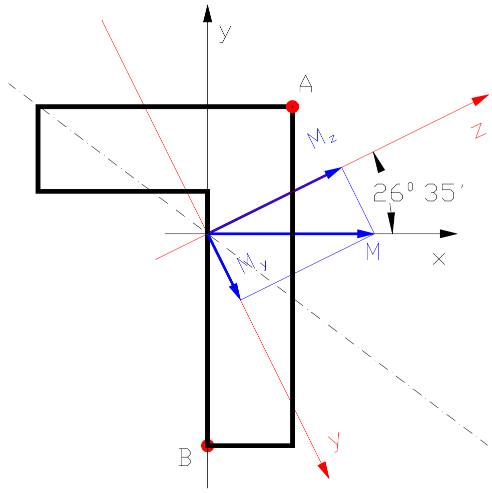
$$\sigma = \frac{0.4472 PL}{40a^4} z - \frac{0.8944 PL}{160a^4} y$$

Równanie osi obojętnej (zbioru punktów przekroju dla których naprężenie równe jest zeru) otrzymujemy podstawiając za σ wartość zero.

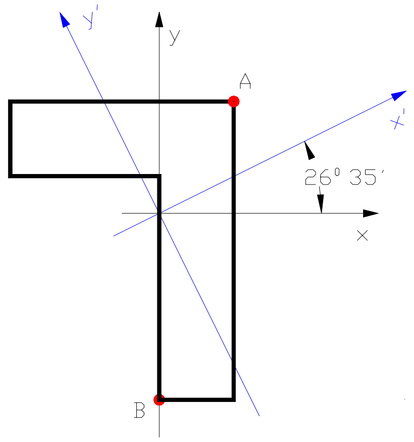
$$0 = \frac{0.4472 PL}{40a^4} z - \frac{0.8944 PL}{160a^4} y \;\Rightarrow z = 0.5 \cdot y$$



Wyznaczmy naprężenia w punktach położonych najdalej od osi obojętnej.
Oznaczmy te punkty literami A i B i wyznaczmy współrzędne tych punktów w osiach głównych centralnych (0yz)



Zapiszemy współrzędne punktów w osiach (0xy) i dokonamy transformacji układu przez obrót o kąt $\alpha=26^o 35'$.



$$x' = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha$$

$$y' = -x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$$

podstawiając dla punktu **A** x=2a, y=3a
i dla punktu **B** x=0, y=-5a otrzymamy odpowiednio współrzędne punktów **A** i **B** w układzie z prymami.
Dla punktu **A**:

$$x' = 2a \cdot \cos\alpha + 3a \cdot \sin\alpha \;\Rightarrow x' = 3.1305a$$

$$y' = -2a \cdot \sin\alpha + 3a \cdot \cos\alpha \Rightarrow y' = 1.7889a$$

Dla punktu **B**:

$$x' = 0a \cdot \cos\alpha + (-5a) \cdot \sin\alpha \;\Rightarrow x' = -2.2361a$$

$$y' = -0a \cdot \sin\alpha + (-5a) \cdot \cos\alpha \Rightarrow y' = -4.4721a$$

Wróćmy do układu (0yz), w którym wyznaczaliśmy naprężenie od zginania.
Współrzędne punktów A i B w tym układzie wynoszą:
Dla punktu **A**:
$y = -y' = -1.7889a$
$z = x' = 3.1305a$
Dla punktu **B**:
$y = -y' = 4.4721a$
$z = x' = -2.2361a$

Podstawmy teraz wyznaczone współrzędne punktów **A** i **B** do wyprowadzonego wcześniej równania na naprężenie normalne przy zginaniu:

$$\sigma = \frac{0.4472PL}{40a^4} z - \frac{0.8944PL}{160a^4} y$$

Dla punktu **A**:
$y = -1.7889a$
$z = 3.1305a$

$$\sigma_A = \frac{0.4472PL}{40a^4} 3.1305a - \frac{0.8944PL}{160a^4}(-1.7889a) \Rightarrow \sigma_A = \frac{1.4PL}{40a^3} + \frac{1.6PL}{160a^3} = \frac{7.2PL}{160a^3},$$

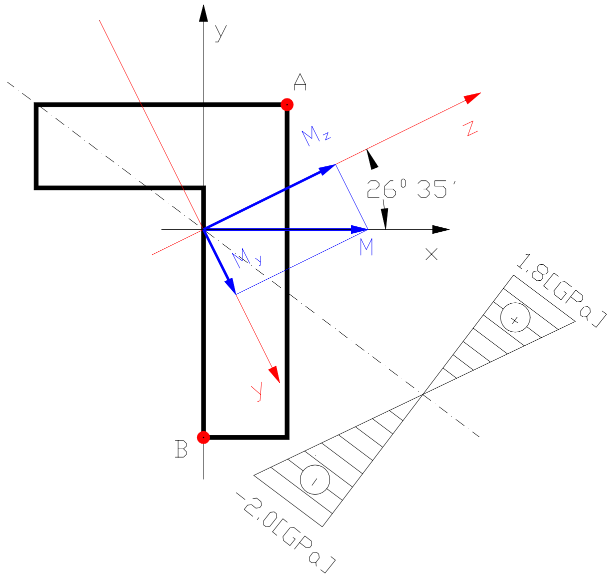
dla PL=4000 [kNcm], a=1 [cm] otrzymamy: $\sigma_A = 180 \cdot [kN/cm^2] = 1.8 \cdot [GPa]$.

Dla punktu **B**:
$y = -y' = 4.4721a$

z=*x'*= -2.2361*a*

$$\sigma_B = \frac{0.4472PL}{40a^4}(-2.2361a) - \frac{0.8944PL}{160a^4}4.4721a \ \Rightarrow \sigma_B = \frac{(-1)PL}{40a^3} - \frac{4PL}{160a^3} = -\frac{-8PL}{160a^3}$$

dla PL=4000 [kNcm], a=1 [cm] otrzymamy: $\sigma_B = -200 \cdot [kN/cm^2] = -2.0 \cdot [GPa]$.

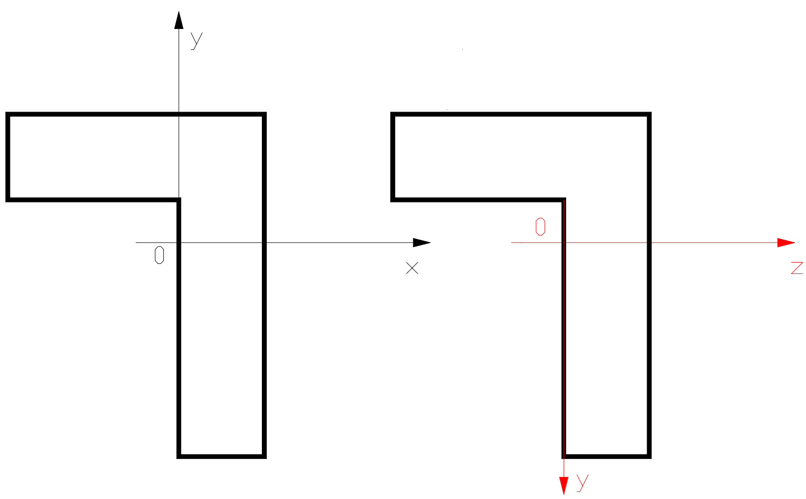


Metoda II – rozwiązanie w osiach centralnych.

Rozkład naprężenia normalnego od zginania zapisany dla układu centralnego wyraża wzór:

$$\sigma = \frac{M_z \cdot I_{yz} + M_y \cdot I_z}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} z - \frac{M_z I_y + M_y \cdot J_{yz}}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} y$$

Przejdźmy z układu (0xy), w którym szukaliśmy momentów bezwładności przekroju poprzecznego do układu (0yz) w którym wyprowadzony był wzór na naprężenia normalne od zginania

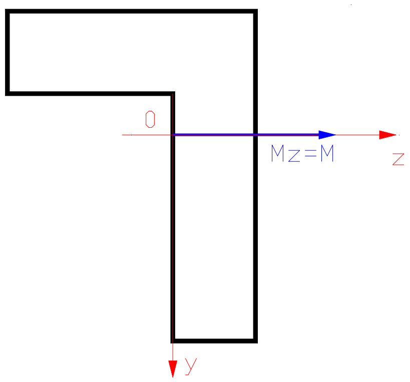


$I_x = 136 \cdot a^4$ $\qquad$ $I_z = 136 \cdot a^4$

$I_y = 64 \cdot a^4$ $\qquad$ $I_y = 64 \cdot a^4$

$I_{xy} = -48 \cdot a^4$ $\qquad$ $I_{yz} = 48 \cdot a^4$

Zauważymy, że naszym zadaniu wektor momentu gnącego pokrywa się z osią z.



Wartości składowych momentu wynoszą więc:

$M_z = \mathrm{PL}$,

$M_y = 0$.

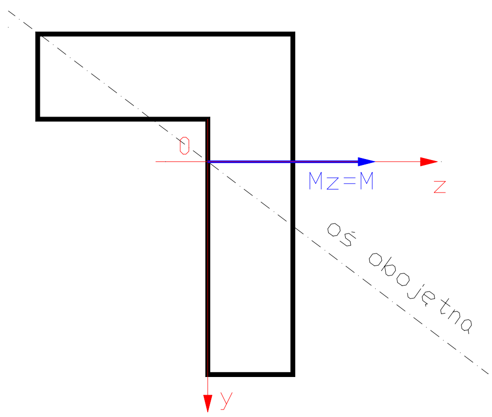
Wzór na naprężenia normalne od zginania upraszcza się do postaci:

$$\sigma = \frac{M_z \cdot I_{yz}}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} z - \frac{M_z I_y}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} y$$

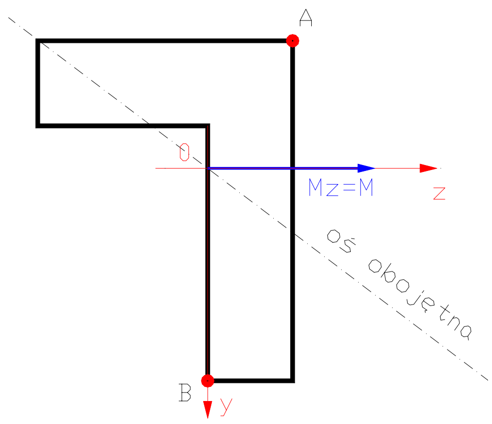
Równanie osi obojętnej otrzymujemy podstawiając za σ wartość zero.

$$0 = \frac{M_z \cdot I_{yz}}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} z - \frac{M_z I_y}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} y \quad \Rightarrow \quad 0 = I_{yz} z - I_y \cdot y$$

$$z = \frac{I_y}{I_{yz}} y \quad \Rightarrow \quad z = \frac{64 \cdot a^4}{48 \cdot a^4} y \quad \Rightarrow \quad z = \frac{4}{3} y$$



Wyznaczmy naprężenia w punktach położonych najdalej od osi obojętnej.
Oznaczmy te punkty literami A i B i wyznaczmy współrzędne tych punktów w osiach centralnych (0yz) .



Współrzędne punktów A i B wynoszą:
Punktu A

$y_A = -3a,$
$z_A = 2a$

Punktu B

$y_B = 5a,$
$z_B = 0$

Podstawmy teraz współrzędne punktów **A** i **B** i wartości momentów bezwładności do wyprowadzonego wcześniej równania na naprężenie normalne przy zginaniu. Otrzymamy naprężenia normalne w punktach leżących najdalej od osi obojętnej.

$$\sigma = \frac{M_z \cdot I_{yz}}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} z - \frac{M_z I_y}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} y$$

dla punktu A

$$\sigma_A = \frac{M_z \cdot I_{yz}}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} z_A - \frac{M_z I_y}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} y_A \Rightarrow$$

$$\sigma_A = \frac{PL \cdot 48 \cdot a^4}{136 \cdot a^4 \cdot 64 \cdot a^4 - (48 \cdot a^4)^2} 2a - \frac{PL \cdot 64 \cdot a^4}{136 \cdot a^4 \cdot 64 \cdot a^4 - (48 \cdot a^4)^2} (-3a) \Rightarrow \sigma_A = 0.045 \cdot \frac{PL}{a^3}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych dla P i L otrzymujemy:

$$\sigma_A = 0.045 \cdot \frac{4000 kNcm}{cm^3} \Rightarrow \sigma_A = 180 \cdot [kN / cm^2] = 1.8 \cdot [GPa]$$

i dla punktu B

$$\sigma_B = \frac{M_z \cdot I_{yz}}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} z_B - \frac{M_z I_y}{I_z \cdot I_y - I_{yz}^2} y_B \Rightarrow \sigma_B = -\frac{PL \cdot 64 \cdot a^4}{136 \cdot a^4 \cdot 64 \cdot a^4 - (48 \cdot a^4)^2} (5a) \Rightarrow$$

$$\sigma_B = -0.05 \cdot \frac{PL}{a^3}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych dla P i L otrzymujemy:

$$\sigma_B = -0.05 \cdot \frac{4000 kNcm}{cm^3} \Rightarrow \sigma_B = -200 \cdot [kN / cm^2] = 2.0 \cdot [GPa]$$