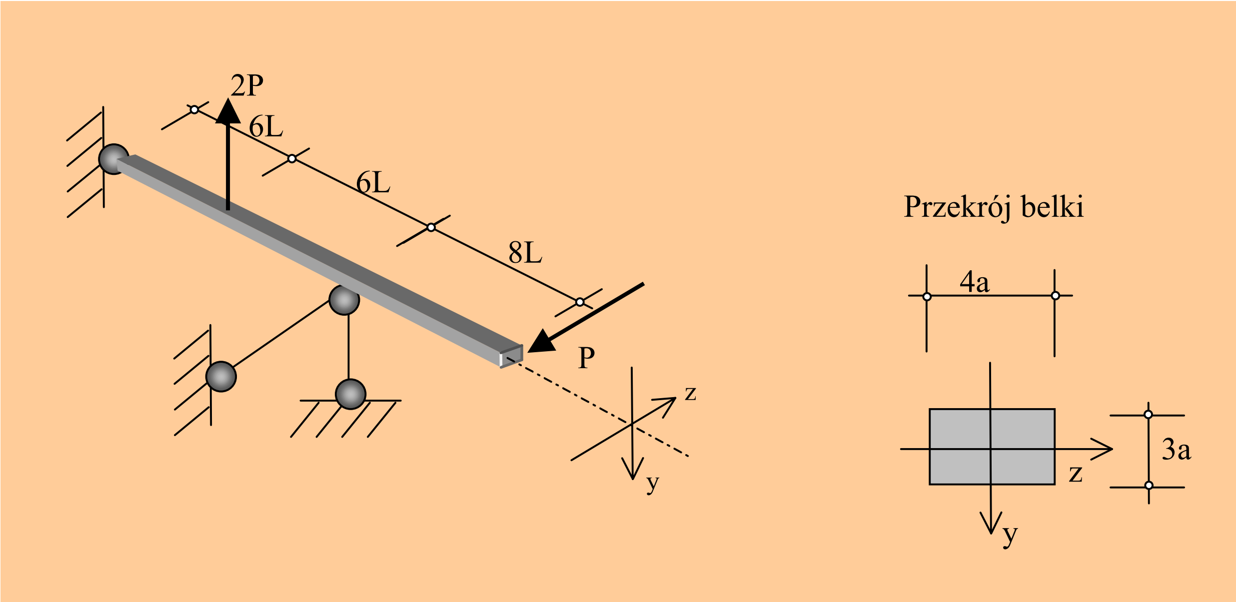
Przykład 3.5. Zginanie ukośne belki o przekroju prostokątnym

Na belkę działa siła pozioma P i pionowa 2P. Znając wartości tych sił, schemat statyczny belki, wartości dopuszczalnego naprężenia na rozciąganie i ściskanie oraz kształt przekroju poprzecznego zaprojektuj wymiar a przekroju belki.



Dane liczbowe:

P=1kN,
L=1m,
naprężenie dopuszczalne na rozciąganie kr=1.0 MPa ,
naprężenie dopuszczalne na ściskanie kc=1.0 MPa.

Rozwiązanie

Rozwiązanie składać się będzie z następujących kroków:

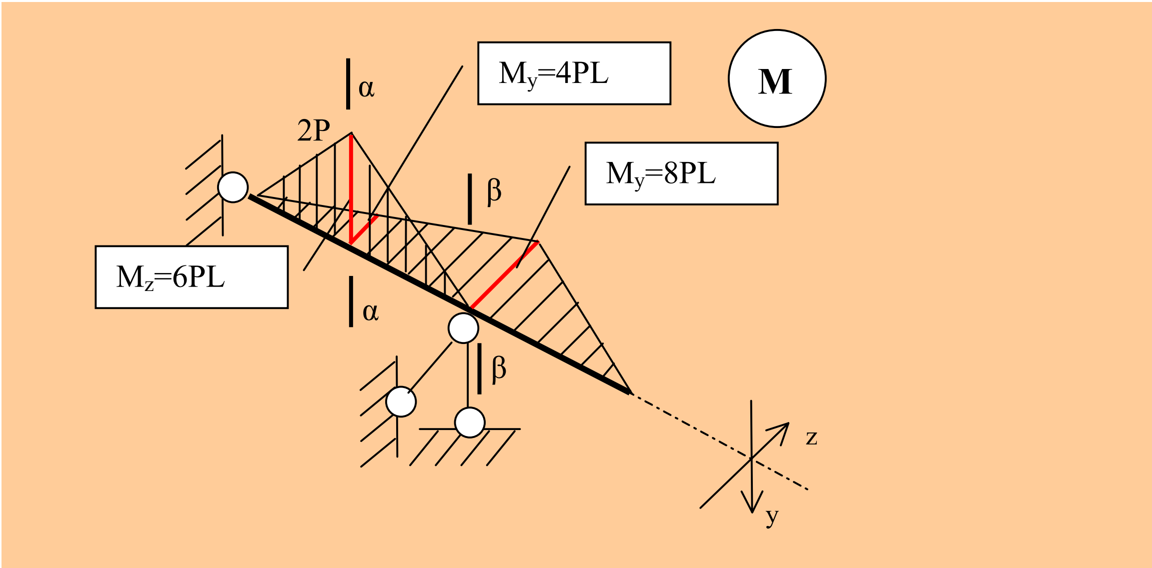
obliczenie charakterystyk przekroju poprzecznego belki,
wyznaczenie wykresu momentu gnącego,
wybranie przekrojów „niebezpiecznych" do analizy naprężeń,
znalezienie naprężeń normalnych,
zapisanie warunku wytrzymałości i wyznaczenie szukanej wielkości.

obliczenie charakterystyk przekroju poprzecznego belki

Dla przekroju prostokątnego obliczymy od razu momenty główne centralne.

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{4 \cdot 3^3}{12} a^4 = 9a^4 , \quad I_y = \frac{b^3 h}{12} = \frac{4^3 \cdot 3}{12} a^4 = 16a^4$$

wyznaczenie wykresu momentu gnącego



W przekroju α- α .składowe momentu gnącego wynoszą:

M_y= 4PL

M_z= 6PL

W tym przekroju występuje zginanie ukośne. Całkowity moment gnący obliczony jako pierwiastek z sumy kwadratów momentów składowych wynosi: M=7.22 PL

W przekroju β- β składowe momentu gnącego wynoszą:

M_y= 8PL

M_z= 0

W tym przekroju występuje zginanie proste.

Obliczymy teraz naprężenia normalne od zginania w obydwu przekrojach.

W przekroju α- α

wyznaczymy naprężenia normalne ze wzoru na zginanie ukośne:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

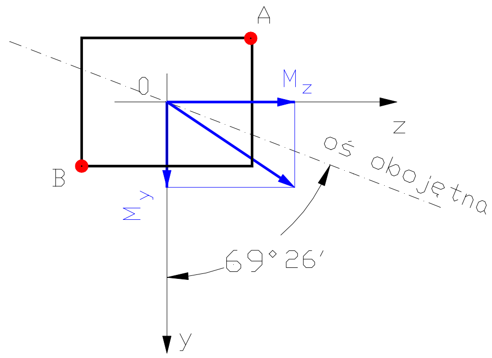
Oś obojętną wyznaczymy podstawiając w miejsce σ zero.

$$0 = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y \;\Rightarrow\; z = \frac{M_z \cdot I_y}{I_z \cdot M_y} y \;\Rightarrow\; z = \mathrm{tg}(\beta) \cdot y$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy

$$\mathrm{tg}(\beta) = \frac{M_z \cdot I_y}{I_z \cdot M_y} = \frac{6PL \cdot 16a^4}{9a^4 4PL} = 2.66$$

$$\beta = 69^0 26'$$



Obliczmy naprężenia w punktach A i B najdalej leżących od osi obojętnej.
Współrzędne punktów A i B wynoszą:

$y_A = -1.5a$ $\qquad$ $y_B = 1.5a$

$z_A = 2.0a$ $\qquad$ $z_B = -2.0a$

Po wstawieniu wartości momentów M_z i M_y otrzymujemy

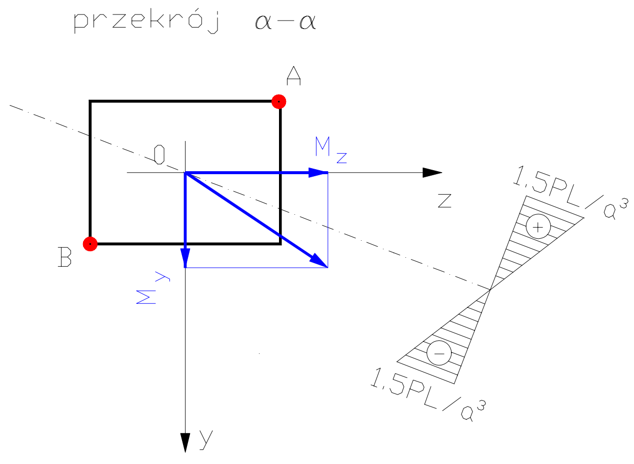
$$\sigma_A = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = 1.5 \frac{PL}{a^3}, \qquad \sigma_B = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = -1.5 \frac{PL}{a^3}$$

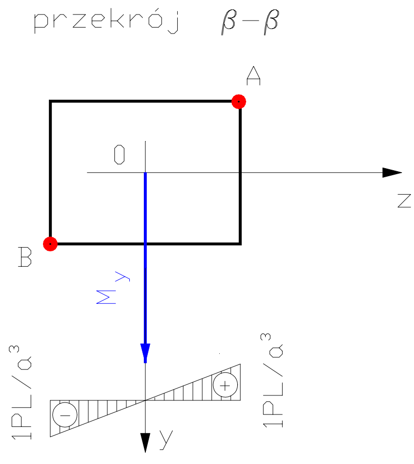
W przekroju β- β
wyznaczymy naprężenia normalne ze wzoru:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z$$

Podstawiając do wzoru moment M_y , moment bezwładności I_y i współrzędne z punktów najdalej leżących od osi y obliczymy ekstremalne wartości naprężenia w przekroju **β- β.**

$$\sigma_A = \frac{M_y}{I_y} z = 1.0 \frac{PL}{a^3}, \qquad \sigma_B = \frac{M_y}{I_y} z = -1.0 \frac{PL}{a^3}$$





Maksymalne naprężenia wystąpiły w przekroju **α- α.**

Zapiszmy warunek wytrzymałości:

$$\sigma_{\max} = \frac{1.5PL}{a^3} \le kr = 1.0[MPa]$$

Powyższa nierówność określa wymiar a: $a \ge \sqrt[3]{\frac{1.5PL}{k_r}}$.

Po podstawieniu wartości liczbowych

P=1kN,
L=1m,
kr=1.0 MPa ,

otrzymamy:
$a^3 \ge 1500[cm^3] \;\;\Rightarrow\;\; a \ge 11.45[cm]$.

Warto zwrócić uwagę, że miejscem, w którym występujące naprężenia normalne wywołane zadanym obciążeniem decydowały o wymiarach przekroju był przekrój α-α, w którym moment co do wartości bezwzględnej nie osiąga maksimum.