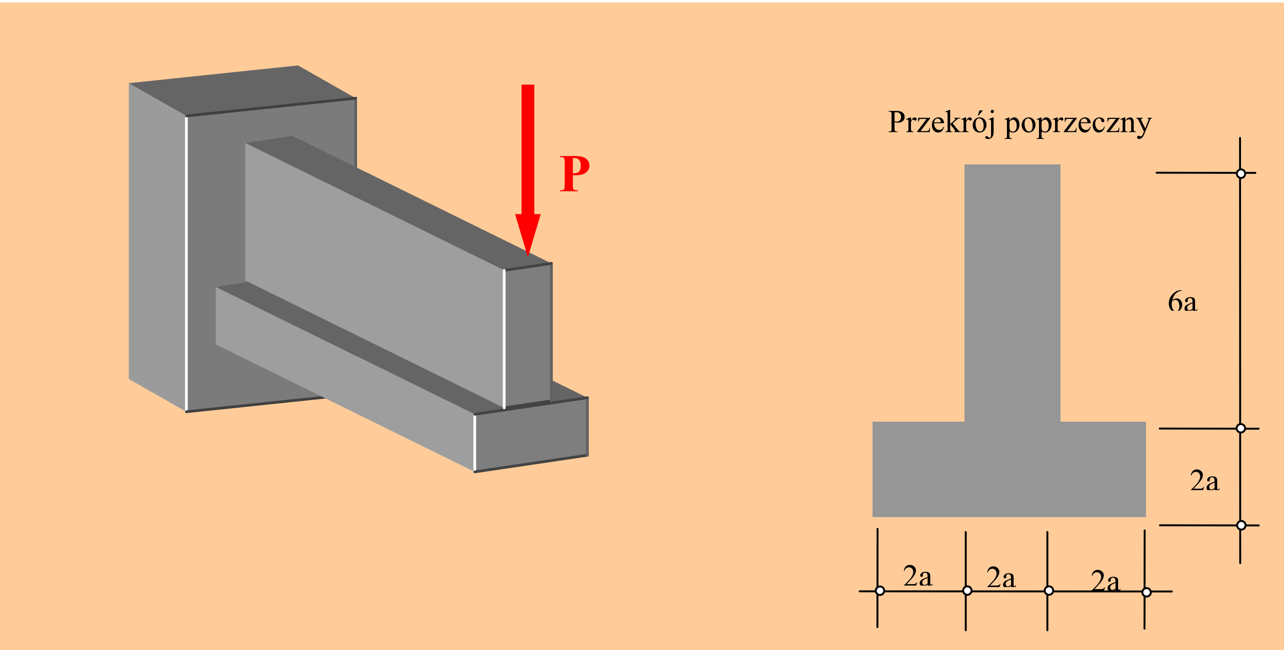
Przykład 3.6. Naprężenia styczne przy zginaniu nierównomiernym.

Wykorzystując wzór Żurawskiego wyznacz rozkład naprężenia stycznego w przekroju podporowym belki wspornikowej obciążonej na końcu swobodnym pionową siłą P. Wymiary przekroju poprzecznego belki podane są na rysunku zamieszczonym poniżej.
Oblicz naprężenia przyjmując następujące wartości liczbowe:
P=20kN, a=1cm



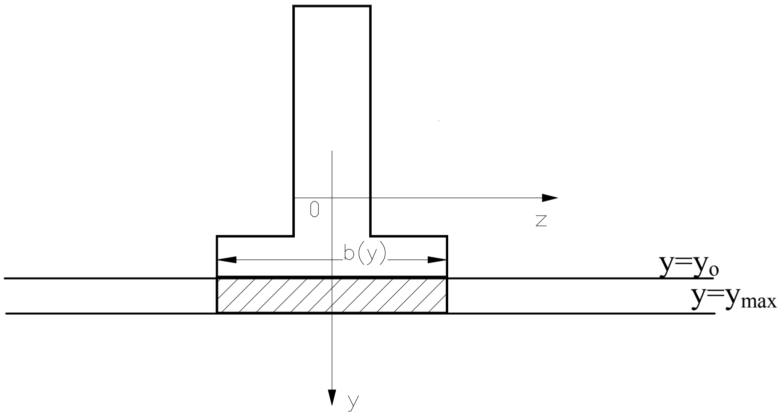
Rozwiązanie
Wyznaczymy rozkład naprężenia stycznego τ_{xy} i τ_{xz} ze wzoru Żurawskiego.

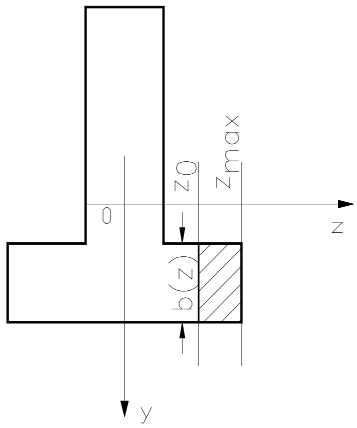
$$\tau_{xy}(y) = \frac{T \cdot S_z^{y\max}(y)}{b(y) \cdot I_z}, \text{ i } \tau_{xz}(z) = \frac{T \cdot S_z^{z\max}(z)}{b(z) \cdot I_z} \text{ gdzie:}$$

T – siła tnąca skierowana wzdłuż osi y,
$S_z^{y\max}$ - moment statyczny względem osi centralnej odciętej części przekroju zawarty między prostymi $y=y_o$, $y=y_{max}$ (na rysunku poniżej odcięta część przekroju oznaczona jest zakreskowanym polem),
$S_z^{z\max}$ - moment statyczny względem osi centralnej odciętej części przekroju zawarty między prostymi $z=z_o$, $z=z_{max}$ (na rysunku poniżej odcięta część przekroju oznaczona jest zakreskowanym polem),

b(y)- szerokość przekroju w miejscu przecięcia z prostą $y=y_o$,
b(z)- szerokość przekroju w miejscu przecięcia z prostą $z=z_o$,

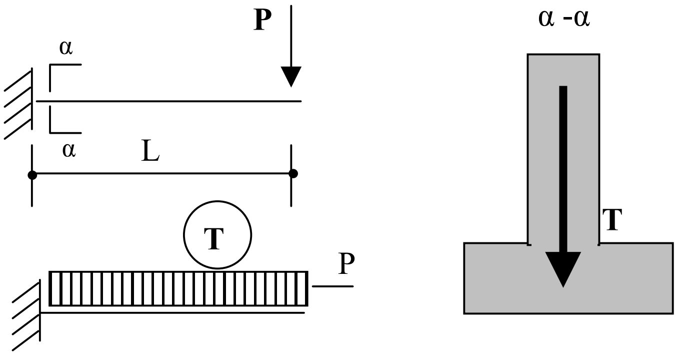
I_z- moment bezwładności przekroju względem osi z. Sposób obliczania momentu bezwładności względem osi centralnej został przedstawiony w zadaniu nr 3.1 „projektowanie przekroju poprzecznego”





$$I_z = \frac{6a\cdot(2a)^3}{12} + (2a)^2\cdot 12a + \frac{2a\cdot(6a)^3}{12} + (2a)^2\cdot 12a = 136a^4$$

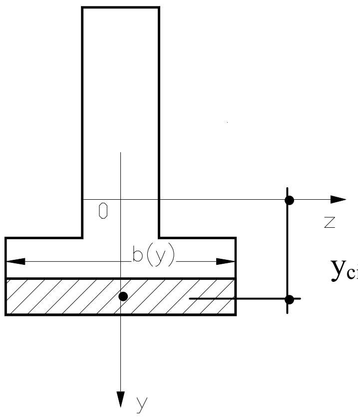
Wyznaczmy siłę tnącą w utwierdzeniu.
T=P=20[kN]



Dalsze obliczenia przeprowadzone zostaną w dwóch punktach.
W punkcie **A** wyznaczone będą naprężenia styczne τ_{xy},
a w punkcie **B** naprężenia styczne τ_{xz}.

A. naprężenie styczne τ_{xy}

Wyznaczmy naprężenie styczne τ_{xy} w dolnej części przekroju dla $y \in (a, 3a)$



y_{ci} =(1/2) (3a+y)

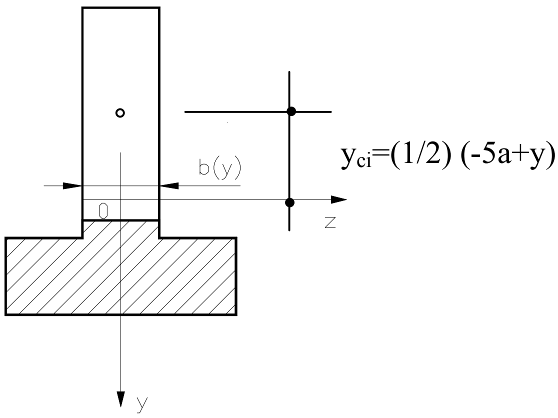
Obliczmy moment statyczny odciętej części przekroju
$S_z^{y\max} = y_{ci} \cdot F_i$
y_{ci} - oznacza współrzędną środka ciężkości odciętej części przekroju
F_i pole powierzchni odciętej części przekroju

$$S_z^{y\max} = \frac{1}{2}(3a + y) \cdot (3a - y) \cdot 6a = 3a \cdot (9a^2 - y^2).$$

Podstawiając do wzoru na naprężenie styczne obliczoną funkcję momentu statycznego otrzymamy:

$$\tau_{xy}(y) = \frac{T \cdot S_z^{y\max}(y)}{b(y) \cdot I_z} = \frac{P \cdot 3a \cdot (9a^2 - y^2)}{6a \cdot 136a^4} = \frac{(9 - \frac{y^2}{a^2})}{272} \cdot \frac{P}{a^2} \quad \text{dla} \;\; y \in (a, 3a)$$

Wyznaczmy teraz naprężenie styczne w górnej, węższej części przekroju dla $y \in (-5a, a)$



Obliczmy moment statyczny odciętej części przekroju

Obliczenia można uprościć jeżeli pamiętamy, że moment statyczny względem osi centralnej jest równy zeru. Oznacza to w naszym zadaniu, że wartości bezwzględne momentów statycznych części górnej i dolnej przekroju są jednakowe. Momenty statyczne tych części względem osi z muszą się różnić znakiem.
Moment części zakreskowanej równy jest więc momentowi części niezakreskowanej wziętej ze znakiem przeciwnym.
Stąd

$$S_z^{y\max} = y_{ci} \cdot F_i$$

y_{ci} - oznacza współrzędną środka ciężkości odciętej części przekroju

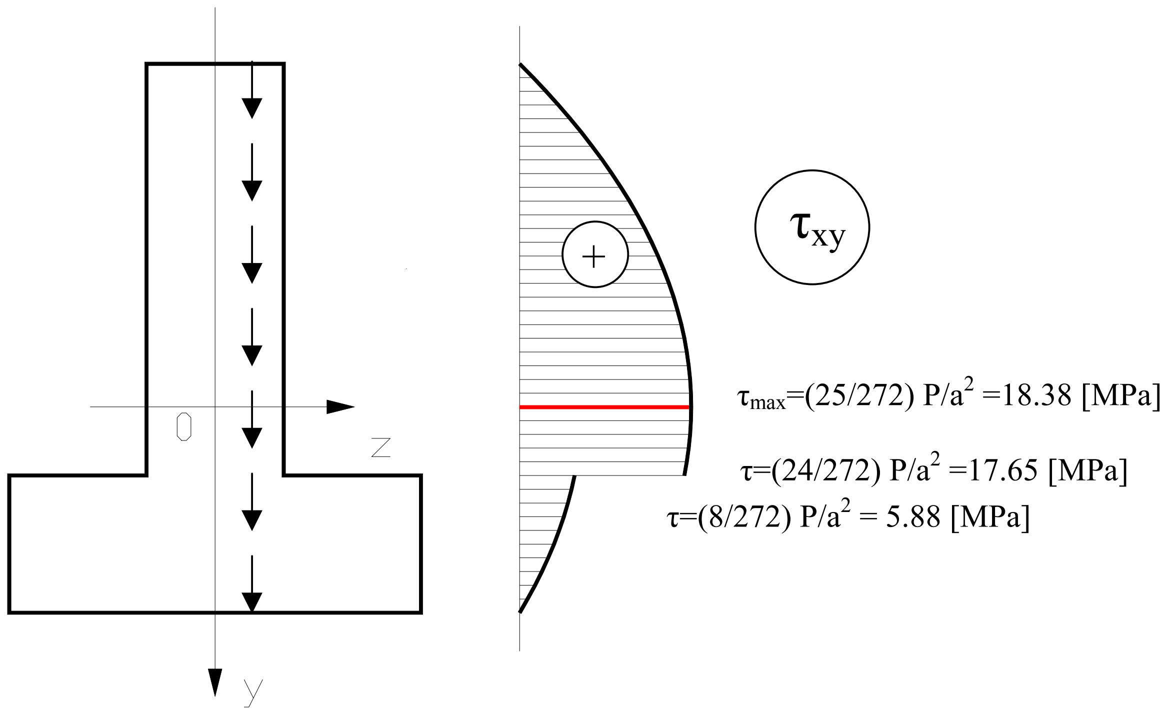
F_i pole powierzchni odciętej części przekroju

$$S_z^{y\max} = (-)\frac{1}{2}(-5a + y)\ (5a + y) \cdot 2a = -a \cdot (y^2 - 25a^2)\,.$$

Podstawiając do wzoru na naprężenie styczne obliczoną funkcję momentu statycznego otrzymamy:

$$\tau_{xy}(y) = \frac{T \cdot S_z^{y\max}(y)}{b(y) \cdot I_z} = -\frac{P \cdot a \cdot (y^2 - 25a^2)}{2a \cdot 136a^4} = \frac{(25 - \frac{y^2}{a^2})}{272} \cdot \frac{P}{a^2} \quad \text{dla} \quad y \in (a, -5a)$$

Narysujmy wykresy wyznaczonych funkcji naprężenia.

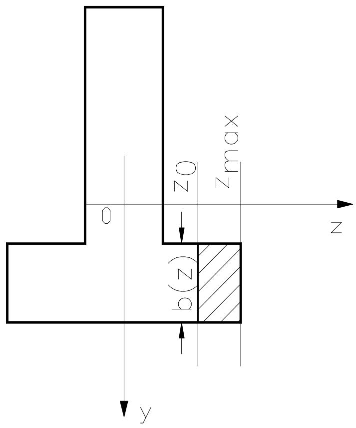


Należy pamiętać o tym, że otrzymaliśmy przybliżony rozkład naprężenia stycznego. Założenie o stałym rozkładzie naprężenia wzdłuż osi z, poczynione przy wyprowadzaniu wzoru Żurawskiego nie pozwala na uwzględnienie zaburzeń pola naprężenia szczególnie dużych w miejscu skokowej zmiany szerokości przekroju belki. Naprężenie styczne τ_{xy} wyznaczone ze wzoru Żurawskiego na górnej powierzchni półki wyniosło 5.88 [MPa]. W rzeczywistości na swobodnej powierzchni górnej półki wartość tego naprężenia równa jest zeru, a w miejscu połączenia ze środnikiem gwałtownie wzrasta.

B. naprężenie styczne τ_{xz}

Wyznaczmy naprężenie styczne τ_{xz} w dolnej części przekroju dla $z \in (a,3a)$ i $z \in (-3a,-a)$. Wyznaczanie ze wzoru Żurawskiego naprężeń stycznych τ_{xz} dla $z \in (-a,a)$ to znaczy dla przekroju dzielącego pionowo środnik jest formalnie możliwe, ale ze względu na małą zgodność z rzeczywistością nie będzie tu przedstawiane.

Wyznaczmy naprężenia dla $z \in (a,3a)$



Obliczmy moment statyczny odciętej części przekroju

$S_z^{z\max} = y_{ci} \cdot F_i$

y_{ci} - oznacza współrzędną środka ciężkości odciętej części przekroju

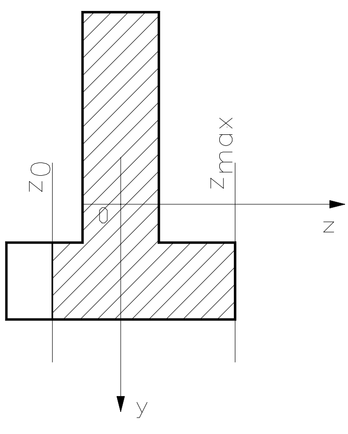
F_i pole powierzchni odciętej części przekroju

$S_z^{z\max} = 2a \cdot (3a - z) \cdot 2a$.

Podstawiając do wzoru na naprężenie styczne obliczoną funkcję momentu statycznego otrzymamy:

$$\tau_{xz}(z) = \frac{T \cdot S_z^{z\max}(z)}{b(z) \cdot I_z} = \frac{P \cdot 4a \cdot (3a - z)}{2a \cdot 136a^4} = \frac{(3a - z)}{68} \cdot \frac{P}{a^3} \text{ dla } z \in (a, 3a)$$

Wyznaczmy naprężenia dla $z \in (-3a, -a)$



Obliczmy moment statyczny odciętej części przekroju

Ponieważ moment statyczny całego przekroju względem osi centralnej równy jest zeru, więc moment statyczny części zakreskowanej równy jest momentowi części niezakreskowanej wziętemu ze znakiem przeciwnym.

A więc $S_z^{z\max} = -2a\cdot(3a+z)\cdot 2a$.
Ostatecznie

$$\tau_{xz}(z) = \frac{T\cdot S_z^{z\max}(z)}{b(z)\cdot I_z} = -\frac{P\cdot 4a\cdot(3a+z)}{2a\cdot 136a^4} = -\frac{(3a+z)}{68}\cdot\frac{P}{a^3} \text{ dla } z\in(-a,-3a).$$

Narysujmy wykresy wyznaczonych funkcji naprężenia.