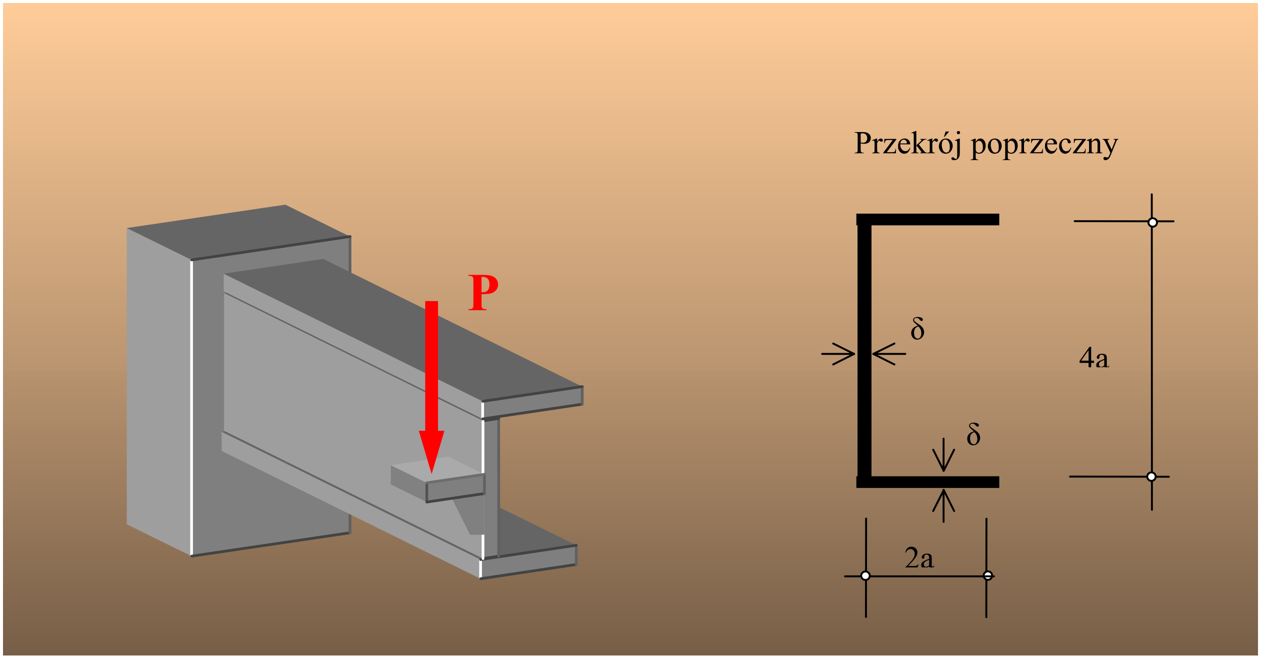
# Przykład 3.7. Naprężenia styczne przy zginaniu belki cienkościennej.

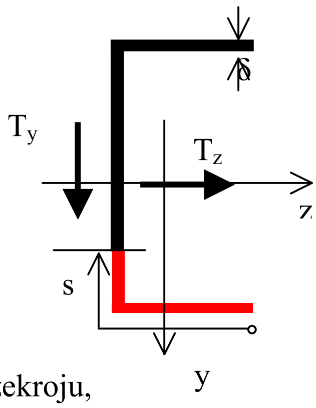
Wyznacz rozkład naprężenia stycznego w przekroju podporowym belki wspornikowej o przekroju cienkościennym obciążonej na swobodnym końcu pionową siłą P. Siła ustawiona jest w środku sił poprzecznych.

Wyznacz położenie środka sił poprzecznych.

Wymiary przekroju poprzecznego belki podane są na rysunku zamieszczonym poniżej.

Oblicz naprężenia przyjmując następujące wartości liczbowe:
P=20kN, a=4cm, δ=3mm




Rozwiązanie
Wyznaczymy rozkład naprężenia stycznego **τ** ze wzoru:

$$\tau(s) = -\frac{T_y \cdot S_z^s(s)}{\delta(s) \cdot I_z} - \frac{T_z \cdot S_y^s(s)}{\delta(s) \cdot I_y}\text{, gdzie:}$$

*s*- współrzędna łukowa o początku na brzegu przekroju,
$T_y$ – siła tnąca skierowana wzdłuż osi y,
$T_z$ – siła tnąca skierowana wzdłuż osi z,
$S_z^s$ - moment statyczny względem osi centralnej *z* odciętej części przekroju,
$S_y^s$ - moment statyczny względem osi centralnej *y* odciętej części przekroju,
*δ(s)*- szerokość przekroju,
$I_z$- moment bezwładności przekroju względem osi głównej centralnej z,
$I_y$- moment bezwładności przekroju względem osi głównej centralnej y.

W omawianym zadaniu składowa pozioma siły tnącej równa jest zeru. Zatem wyrażenie na naprężenie styczne upraszcza się do postaci:

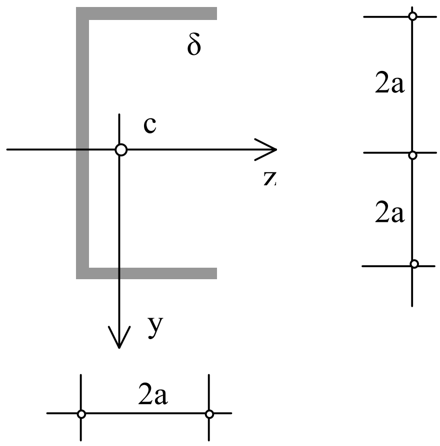
$$\tau(s) = -\frac{T_y \cdot S_z^s(s)}{\delta(s) \cdot I_z}$$

Obliczmy poszczególne składniki powyższego wzoru.

Z treści zadania wynika, że siła tnąca $T_y$ jest stała i wynosi P.

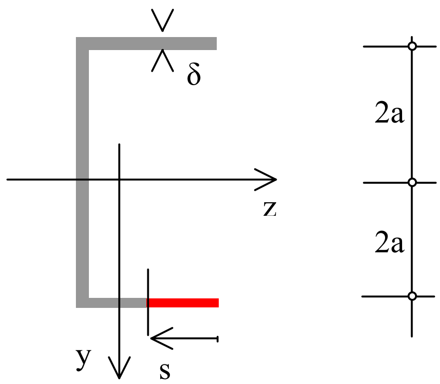
Obliczmy moment statyczny $I_z$

Do wyznaczenia momentu bezwładności $I_z$ wystarczy ustalenie położenia poziomej osi głównej centralnej. Ponieważ przekrój poprzeczny ma poziomą oś symetrii oś ta jest także osią główną centralną.
Moment bezwładności względem osi z obliczymy wykorzystując wzór Steinera.
Wyrażenia, w których występuje mała wyższego rzędu $\delta^3$ będziemy pomijać.




$$I_z = \frac{(4a)^3 \cdot \delta}{12} + 2 \cdot (2a)^2 \cdot 2a\delta = \frac{64}{3} a^3 \delta$$

**Wyznaczmy naprężenie styczne w dolnej półce przekroju dla** $s \in (0,2a)$




Obliczmy moment statyczny odciętej części przekroju
$S_z^s = y(s) \cdot F(s)$
$y(s)$ - oznacza współrzędną środka ciężkości odciętej części przekroju
$F(s)$ pole powierzchni odciętej części przekroju

Dla $s \in (0,2a)$

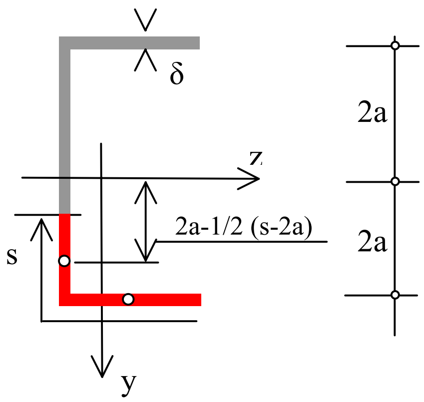
$$S_z^s = y(s) \cdot F(s) = 2a \cdot s\delta$$

Podstawiając do wzoru na naprężenie styczne obliczoną funkcję momentu statycznego otrzymamy:

$$\tau(s) = -\frac{T_y \cdot S_z^s(s)}{\delta(s) \cdot I_z} = -\frac{P \cdot 2as\delta}{\delta \frac{64}{3} a^3 \delta} = -\frac{6P \cdot s}{64a^2\delta}$$

Znak minus oznacza , że zwrot naprężenia stycznego jest przeciwny do kierunku wzrostu współrzędnej łukowej s.

**Wyznaczmy naprężenie styczne w ściance środnika dla** $s \in (2a, 6a)$




Obliczmy moment statyczny odciętej części przekroju dla $s \in (2a, 6a)$ $S_z^s = y(s) \cdot F(s)$

$$S_z^s = y(s) \cdot F(s) = 4a^2\delta + \left[2a - \frac{1}{2}(s - 2a)\right] \cdot (s - 2a)\delta$$

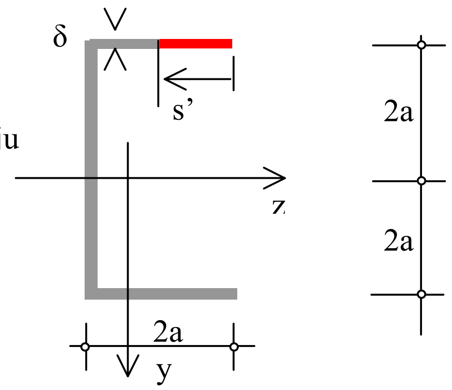
$$S_z^s = \left(-\frac{1}{2}s^2 + 4sa - 2a^2\right)\delta$$

Podstawiając do wzoru na naprężenie styczne obliczoną funkcję momentu statycznego otrzymamy:

$$\tau(s) = -\frac{T_y \cdot S_z^s(s)}{\delta(s) \cdot I_z} = -\frac{P \cdot \left(-\frac{1}{2}s^2 + 4sa - 2a^2\right)\delta}{\delta \frac{64}{3} a^3 \delta} = -\frac{3P \cdot \left(-\frac{1}{2}s^2 + 4sa - 2a^2\right)}{64a^3\delta}$$

Znak minus oznacza , że zwrot naprężenia stycznego jest przeciwny do kierunku wzrostu współrzędnej łukowej s

**Wyznaczmy naprężenie styczne w górnej półce przekroju dla** $s \in (6a, 8a)$
Wprowadźmy nową współrzędną łukową s', której początek znajduje się na krawędzi górnej półki.




Obliczmy moment statyczny odciętej części przekroju
$S_z^{s'} = y(s') \cdot F(s')$

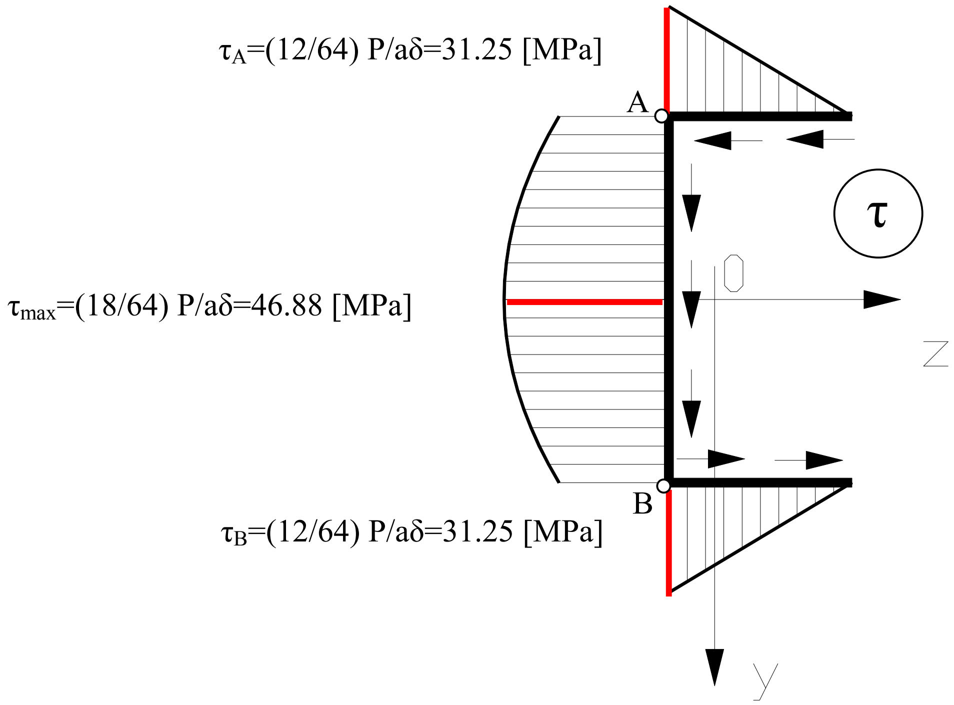
Dla $s' \in (0, 2a)$

$$S_z^{s'} = y(s') \cdot F(s') = -2a \cdot s'\delta$$

Podstawiając do wzoru na naprężenie styczne obliczoną funkcję momentu statycznego otrzymamy:

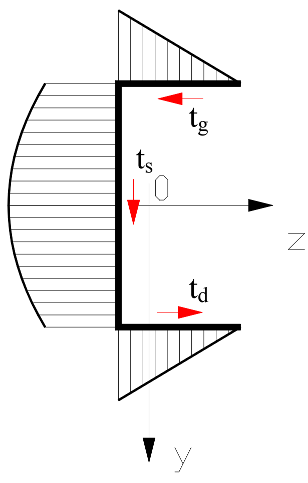
$$\tau(s') = -\frac{T_y \cdot S_z^{s'}(s)}{\delta(s) \cdot I_z} = \frac{P \cdot 2as'\delta}{\delta \frac{64}{3} a^3 \delta} = \frac{6P \cdot s'}{64a^2\delta}$$

Narysujmy wykresy wyznaczonych funkcji naprężenia.
Oznaczymy zwroty naprężenia strzałkami.




Wyznaczmy położenie środka sił poprzecznych.

Policzmy sumę naprężeń stycznych działających w półkach górnej i dolnej oraz w środniku.




Sumę naprężeń $\tau(s') = \dfrac{6P \cdot s'}{64a^2\delta}$ na górnej półce $t_g$ obliczymy z całki:

$$t_g = \int_{s'=0}^{s'=2a} \tau\delta \cdot ds' = \int_0^{2a} \frac{6Ps'}{64a^2\delta}\delta \cdot ds$$

$$t_g = \int_0^{2a} \frac{6Ps'}{64a^2\delta}\delta \cdot ds = \left.\frac{6P\frac{1}{2}s'^2}{64a^2}\right|_0^{2a} = \frac{3}{16}P$$

Suma naprężeń na dolnej półce $t_d$ jest oczywiście taka sama jak na górnej.

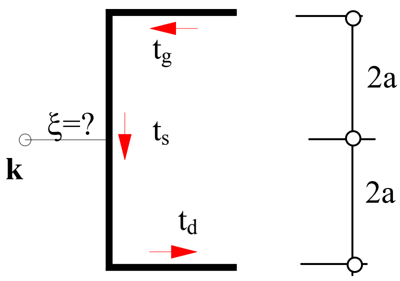
$$t_d = t_g$$

Sumę naprężeń $\tau(s) = -\dfrac{3P\cdot\left(-\frac{1}{2}s^2 + 4sa - 2a^2\right)}{64a^3\delta}$ w środniku $t_s$ obliczymy z całki:

$$t_s = \int_{s=2a}^{s=6a} \tau\delta \cdot ds = \int_{2a}^{6a} \frac{3P\cdot\left(-\frac{1}{2}s^2 + 4sa - 2a^2\right)}{64a^3\delta}\delta \cdot ds$$

$$t_s = P$$

Położenie środka siłą poprzecznych obliczymy z warunku zerowania się momentów od sił w półkach i środniku. Ponieważ środek sił poprzecznych znajduje się na osi symetrii do wyznaczenia pozostaje tylko współrzędna pozioma.




$$\sum M_k = t_g 2a + t_d 2a - t_s\xi = 0 \;\Rightarrow\; \frac{3}{16}P\cdot 2a + \frac{3}{16}P\cdot 2a - P\cdot\xi = 0 \Rightarrow \xi = \frac{3}{4}a = 3\cdot[cm]$$